

LICENCE DE PHYSIQUE
MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Un fluide incompressible est en écoulement irrotationnel parallèlement à un plan rapporté aux axes orthonormés Ox , Oy . Le flot est dû à deux sources de même intensité q placés aux points $(x = a, y = 0)$ et $(x = -a, y = 0)$ et à un puits d'intensité $2q$ placé à l'origine.

1: Montrer que les lignes de courant de l'écoulement ont pour équation une expression de la forme

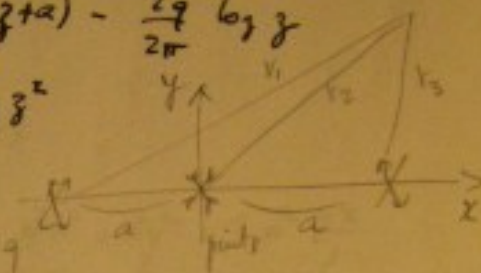
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 f(x, y, \lambda) \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre.}$$

Déterminer la fonction f .

2: Calculer le module de la vitesse du fluide en un point M distant de r_1 , r_2 et r_3 des 2 sources et du puits en fonction de r_1 , r_2 et r_3 .

Réponse: le potentiel complexe est

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{q}{2\pi} \log(z-a) + \frac{q}{2\pi} \log(z+a) - \frac{2q}{2\pi} \log z \\ &= \frac{q}{2\pi} \log(z^2 - a^2) - \frac{q}{2\pi} \log z^2 \\ &= \frac{q}{2\pi} \log \frac{z^2 - a^2}{z^2} = \frac{q}{2\pi} \log \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \end{aligned}$$



Soit $z = \rho e^{i\varphi}$

on a donc

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log \frac{(\rho^2 e^{2i\varphi} - a^2)}{(\rho^2 e^{2i\varphi})} = \frac{q}{2\pi} \log \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} e^{-2i\varphi}\right)$$

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\varphi + i \frac{a^2}{\rho^2} \sin 2\varphi\right) = \phi + i\psi$$

les lignes de courant sont les courbes $\varphi = \text{cte}$ ie $\text{Im } F(z) = \text{cte}$

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z = \frac{q}{2\pi} \log(\rho e^{i\theta}) = \frac{q}{2\pi} (\log \rho + i\theta) \quad \text{Im } \log z = \theta = \text{Arg } z$$

Donc

$$\text{Im } F(z) = \frac{q}{2\pi} \text{Arg} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\varphi + i \frac{a^2}{\rho^2} \sin 2\varphi\right) = \text{cte}$$

$$\text{multiplie} \quad \frac{\frac{a^2}{\rho^2} \sin 2\varphi}{1 - \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\varphi} = \text{cte}$$

$$\begin{aligned} \text{c.a.d.} \quad \frac{a^2}{\rho^2} \sin 2\varphi &= \lambda \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\varphi\right) \\ a^2 \sin 2\varphi &= \lambda (\rho^2 - a^2 \cos 2\varphi) \end{aligned}$$

-3. Test für 91

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2 \frac{yx}{\rho^2} \quad \cos 2\varphi = 2 \frac{x^2}{\rho^2} - 1$$

Dann

$$2a^2 \frac{yx}{\rho^2} = \Delta \left(\rho^2 - a^2 \frac{2x^2}{\rho^2} + a^2 \right)$$

$$\rho^4 - 2a^2 x^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 = 2a^2 \frac{yx}{\rho^2}$$

$$\rho^4 (x^2 + y^2)^2 - a^2 (y^2 + x^2) = 2a^2 yx$$

2) Module der Wirtue

$$\frac{df}{dz} = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z+a} - \frac{2}{z} \right]$$

$$= \frac{q}{2\pi} \left[\frac{(z+a)z + (z-a)z - 2(z^2-a^2)}{(z^2-a^2)z} \right]$$

$$= \frac{q}{2\pi} \frac{2a^2}{(z^2-a^2)z}$$

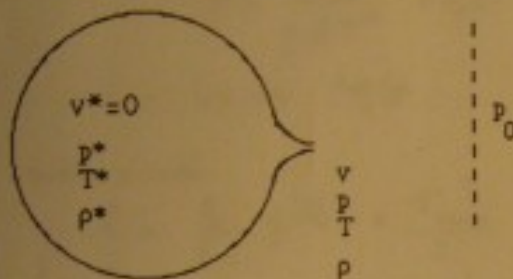
$$|V| = \left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{qa^2}{\pi a^4 v_1 v_2 v_3}$$

$$\rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{df}{dx} \gamma(y-b) \quad \text{Poisson'sche}$$

I. Écoulement dans une tuyère

Un gaz contenu dans un grand réservoir s'écoule par une tuyère simple dans l'espace où règne la pression p_0 . On désigne par p, ρ, v les valeurs des caractéristiques de l'écoulement au col de la tuyère (qui a une section S) et par p^*, ρ^*, v^* les caractéristiques dans le réservoir, loin de l'ajutage. On suppose $v^*=0$ et p^*, ρ^*, T^* constants.



1- Si $\frac{p_0}{p^*} = 1$, le débit massique $G = \rho v S$ est nul. Pourquoi ?

2- Soit $\frac{p_0}{p^*} < 1$. Exprimer le nombre de Mach au col en fonction de $k = \frac{C_p}{C_v}$ et $\frac{p}{p^*}$. Pour une valeur de p_0 dite critique, p_{cr} , la vitesse au col est égale à la vitesse locale du son. On admet que $p = p_{cr}$. Donner l'expression du débit en fonction de S, p^*, ρ^* et k .

Rappel : vitesse du son $= \sqrt{k g R T}$.

A.N : Le gaz est de l'air $R = 29.2 \text{ m}^2/\text{K}$, $k = 1.4$, $p^* = 800 \text{ kN/m}^2$, $T^* = 45^\circ\text{C}$. Rayon de la section au col $= 0.1 \text{ m}$. Calculer G et p_{cr} .

3- On définit la vitesse maximale le long d'une ligne de courant comme étant v_{max}

$$\text{telle que } \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} g R T = \frac{v_{max}^2}{2}$$

Exprimer v_{max} en fonction de T^* . Quelle est la valeur de la vitesse du son maximale

c_1 en fonction de T^* . Relation entre c_1 et v_{max} .

Lorsque la vitesse d'une particule gazeuse est égale à la vitesse du son, elle est dite critique et $v = v_{cr}$. Exprimer v_{cr} en fonction de v_{max} et k .

A.N: $T^* = 15^\circ\text{C}$. Calculer v_{max} .

1) Pressions identiques à l'entrée et à la sortie : pas de frottement au biseau

$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left\{ \frac{p^+}{\rho^+} - \frac{p}{\rho} \right\}$$

$$p = p_0 \quad \frac{p^+}{p_0} = 1 \rightarrow v = 0$$

2) $Ma^2 = 1$

$$\left(\frac{p^+}{p} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 = \frac{k-1}{2} \rightarrow \frac{p}{p^+} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad p = p_{cr}$$

$$\text{Débit } G = S \left\{ k p^+ \rho^+ \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

AN: $\frac{p_{cr}}{p^+} = 0,528 \rightarrow p_{cr} = 4,22 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

$$\rho^+ = \frac{p^+}{gRT^+} = 8,61 \text{ kg/m}^3$$

$$\rightarrow G = 56,46 \text{ kg/s}$$

3) vitesse maximale

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} gRT = \frac{v_{max}^2}{2} = \frac{k}{k-1} gRT^+$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} gRT^+}$$

AN $v_{max} = 767 \text{ m/s}$

Vitesse du son maximale obtenue quand $v=0$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{k-1} = \frac{c^2}{k-1} = \frac{v_{max}^2}{2} = \frac{c_1^2}{k-1}$$

Donc $C_1 = \sqrt{\frac{k-1}{2}} v_{max}$

AN $v = v_{cr} \quad \frac{v_{cr}^2}{2} + \frac{v_{cr}^2}{k-1} = \frac{v_{max}^2}{2} \rightarrow v_{cr} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} v_{max}$

— N —

LICENCE DE PHYSIQUE
MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

- I. Etablir les équations de constitution par la méthode classique (lois de la mécanique, c'est-à-dire action et réaction) et par les transformations de Laplace des modèles mécaniques dits de Maxwell, Voigt, modèle standard.

- II. 1) Des équations de Navier Stokes pour un fluide visqueux incompressible, déduire l'équation $\Delta_2 u = \mu^{-1} (dp / dx)$ (μ coefficient de viscosité dynamique) dans le cas d'un écoulement stationnaire le long de Ox, dans une conduite de section arbitraire (dans un plan perpendiculaire à Ox), le champ de vitesses ayant la forme $\vec{v} = (u, 0, 0)$, $\vec{v} = 0$ sur les bords, Δ_2 Laplacien à deux dimensions, p pression.

Si le flot a une symétrie cylindrique par rapport à Ox, donner $u(r)$. Déterminer la vitesse d'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux dans une canalisation annulaire de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2 .

N.B. $\Delta_2 f(r) = r^{-1} d/dr (r df/dr)$

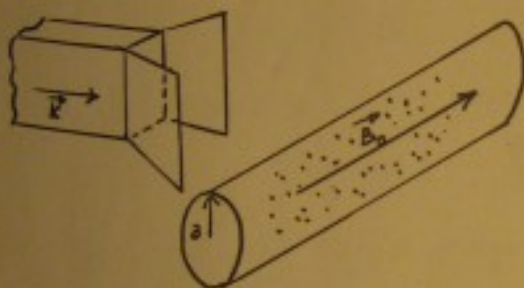
- 2) De l'équation de conservation de l'énergie pour des fluides compressibles, non visqueux, en mouvement stationnaire, isentropiques, n'échangeant pas de travail avec l'extérieur, déduire une relation du type $f(v, gy, p, \rho, k) = \text{cte}$, où $k = C_p / C_v$. On considèrera pour cela un tube de courant de section suffisamment petite pour que le flot puisse y être considéré comme uniforme.

Du méthane ($R = 52,9 \text{ m}^3/\text{K}$, $k = 1,32$) s'échappe de manière isentropique d'un réservoir à travers une ouverture de section S (petite par rapport aux dimensions du réservoir). La température dans le réservoir est T_1 , la pression y est p_1 alors que la pression dans le jet est p_2 . La pression extérieure est p_{ext} .

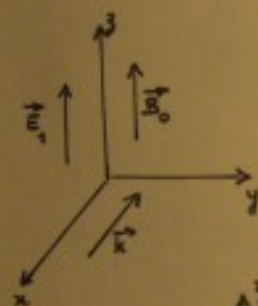
Calculer le nombre de Mach dans le jet en fonction de p_1 , p_2 et k . Donner $(p_2/p_1)_c$ pour lequel le jet atteint la vitesse du son.

Δ.N : $p_1 = 200 \text{ kN/m}^2$, $p_{\text{ext}} = 80 \text{ kN/m}^2$, $T_1 = 50^\circ\text{C}$, $S = 10^{-2} \text{ m}^2$. Calculer le débit du fluide à travers S , sa température et sa vitesse.

3) Une onde électromagnétique (pulsation ω) se propageant dans un guide d'ondes, pénètre dans un plasma où règne un champ magnétique $\vec{B}_0$. (On ne tiendra pas compte des effets de bords - a suffisamment grand - et du mouvement des ions).



a) L'onde se propageant dans le plasma est telle que $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$, $\vec{k} \perp \vec{B}_0$.
Déduire des équations de Maxwell et des équations du mouvement des électrons linéarisées la relation de dispersion pour de telles ondes. Pourquoi sont elles appelées ordinaires ?

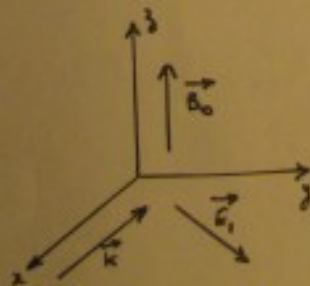


b) Représentant l'onde extraordinaire $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$ sous la forme
 $\vec{E}_1 = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$

montrer que la relation de dispersion pour cette onde est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right] \quad \omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$$

c) Montrer que l'onde extraordinaire est électrostatique ($\vec{E}_1 \parallel \vec{k}$) à la résonance.



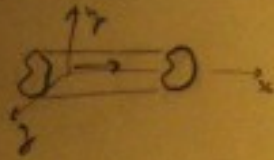
I (4) II 1)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \phi}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla^2 \vec{v} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = (v, u, w)$$

$$v = u(y, z) \quad w = 0 \quad u = 0$$

$$du/dz = 0$$



$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \Rightarrow \left(u \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0$$

$$\text{by } \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{by } 0 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \rho \quad \Rightarrow \quad \phi = -\rho g y + f(x)$$

$$\text{ix: } 0 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d\phi}{dx} = \eta u$$

independant dx
for du

independant dz

$$\Delta u = \frac{1}{\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \eta u$$

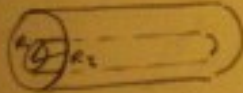
Equation cylindrique:

$$u = u(r)$$

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + c \log r + d$$

App:



$$v = 0 \quad \text{at } r = R_1 \text{ and } r = R_2$$

$$u(R_1) = \frac{R_1^2}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + c \log R_1 + d = 0$$

$$\frac{R_2^2}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + c \log R_2 + d = 0$$

$$\Rightarrow c \log \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) (R_1^2 - R_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow d = -\frac{R_1^2}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) - \log R_1 \left[-\frac{1}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) (R_1^2 - R_2^2) \right]$$

$$\Rightarrow u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \left\{ R_1^2 - r^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log \frac{R_2}{R_1}} \log \frac{r}{R_2} \right\}$$

Ex.

Pr II 2)

$$\int (\rho + \rho g) \vec{r} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$



$$\rightarrow (\rho + \rho g)_{z_1} = (\rho + \rho g)_{z_2}$$

$$e = \frac{v^2}{2} + gy + gz$$

$$e = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy + gz = \text{cte}$$

$$h = u + \frac{p}{\rho g}$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{2} + y + h = \text{cte}$$

$$h = C_p T$$

$$h = C_p T = \frac{k R T}{k-1}$$

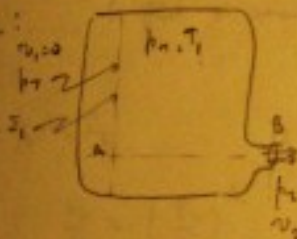
$$\rightarrow \frac{v^2}{2} + y + \frac{k R T}{k-1} = \text{cte}$$

Q-m

$$p = \rho g R T$$

$$\frac{v^2}{2} + gy + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{cte}$$

Application:



$$\frac{v^2}{2g} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho g} = \text{cte} \quad \text{entre A et B}$$

Donc

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho g} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho g}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho g} \right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - 1 \right]$$

$$\text{or } \frac{p_1}{\rho_1 g} = \frac{p_2}{\rho_2 g} \Rightarrow \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho_1 g} \right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$Ma_2 = \frac{v_2}{c_2} = \frac{v_2}{\sqrt{k g R T_2}} = \frac{v_2}{\sqrt{R g \frac{p_2}{\rho_2 g}}}$$

$$\rightarrow Ma_2 = \frac{v_2}{\sqrt{k g \frac{p_2}{\rho_2 g}}}$$

- R3 -

$$P_2^2 = \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$P_2^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{P_1}{P_{2c}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{P_{2c}-1}{2} + 1 = \frac{P_{2c}+1}{2}$$

$$\left(\frac{P_1}{P_{2c}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{2}{P_{2c}+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

flot soumise $P_{2c} > P_{at}$

AN: $P_1 = 200 \text{ bar/m}^2$ $P_{at} = 100 \text{ bar/m}^2$

$$\left(\frac{P_1}{P_{2c}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{2}{1.32+1} \right)^{\frac{1.32}{1.32-1}} = \left(\frac{2}{2.32} \right)^{\frac{1.32}{0.32}} = \left(\frac{2}{2.32} \right)^{4.125}$$

$$= (0.862)^{4.125} = 0.542$$

$$\frac{P_{at}}{P_1} = \frac{100}{200} = 0.5$$

Donc $P_{2c} > P_{at}$

le flot est soumise dans la gorge

Delit

$$G = \rho_1 v_1 S_1 \quad v_2 = \sqrt{h g R T_2} = \sqrt{k \frac{P_2}{\rho_2}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$G = \rho_1 S_1 \left(\frac{k P_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} = S_2 \left(k \rho_2 P_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \frac{\rho_2 P_2}{S_1 P_1} = \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \rightarrow \rho_2 P_2 = S_1 P_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}$$

$$G = S_2 \left(k \rho_2 P_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or $\left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \left(\frac{P_2}{P_{2c}} \right) = \left(\frac{2}{P_{2c}+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ quand le flot est soumise

Donc $G = S_2 \left(k \rho_2 P_1 \left(\frac{2}{P_{2c}+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$

- Du -

$$\underline{AN:} \quad S_1 = \frac{p_1}{\rho R T_1} = \frac{200 \cdot 10^3}{9.81 \times 52.9 \times 323} = 1.193 \text{ kg/m}^3$$

$$T_{12} = 323^\circ\text{K} \quad (50^\circ\text{C})$$

$$S_2 = 1.2$$

$$\begin{aligned} G &= 10^{-2} \left(1.32 \times 1.193 \times 200 \cdot 10^3 \left(\frac{2}{2.32} \right)^{\frac{2.32}{2.32-1.193}} \right)^{1/2} \\ &= 10^{-2} \left(107083.68 \right)^{1/2} \\ &= 3.27 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

$$\text{vitesse (sm)} \quad v = \sqrt{\frac{2}{S_2} R T_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Temperature} \quad T_2 &= \frac{p_2}{S_2 \rho R} \\ S_2 &= S_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} = 1.193 \times (0.542)^{1/1.32} \\ &= 1.193 \times (0.542)^{0.757} = 1.193 \times 0.628 \\ &= 0.750 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$p_2 = 0.542 \quad p_1 = 0.542 \times 200 \cdot 10^3 = 108.4 \text{ kN/m}^2$$

$$T_2 = \frac{108.4 \cdot 10^3}{0.750 \times 9.81 \times 52.9} = 278.5^\circ\text{K} = 5.5^\circ\text{C}$$

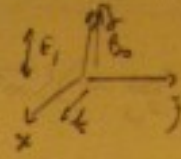
$$\begin{aligned} \text{vitesse (sm)} \quad v_2 &= \sqrt{\frac{2}{S_2} R T_2} = (1.32 \times 9.81 \times 52.9 \times 278)^{1/2} \\ &= (190433.53)^{1/2} = 436.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ref II 3)

$$a) \quad \mathcal{D}(\mathcal{D}\vec{E}_1) - \partial\vec{E}_1 = -\nabla\left(\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}\right)$$

$$-\vec{E}_1(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1) + \vec{E}_1^2 \vec{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \vec{J}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1$$

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \vec{E}_1 = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0} \vec{J}_1$$



$$\vec{J}_1 = -n_0 e \vec{v}_1$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -e \vec{E}_1$$

$$\vec{v}_1 = \frac{e \vec{E}_1}{i m \omega}$$

$$b) \quad (\omega^2 - k^2 c^2) \vec{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0} \frac{n_0 e^2}{i m \omega} \vec{E}_1 = \omega_p^2 \vec{E}_1$$

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$$

and nonlinear interaction / on
that wave type.

$$b) \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_x \vec{e}_x + \vec{E}_y \vec{e}_y \quad \vec{E}_1 \equiv \vec{E} \text{ (notation)}$$

$$\text{+ prob. hot} \quad -i m \omega \vec{v}_1 = -e(\vec{E} + \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0)$$

$$\vec{v}_x = -\frac{ie}{m\omega} (\vec{E}_x + v_y B_0)$$

$$\vec{v}_y = -\frac{ie}{m\omega} (\vec{E}_y - v_x B_0)$$

$$\vec{v}_x = \frac{e}{m\omega} \left(-i \vec{E}_x - \frac{\omega_c}{\omega} \vec{E}_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$\vec{v}_y = \frac{e}{m\omega} \left(-i \vec{E}_y + \frac{\omega_c}{\omega} \vec{E}_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$



$$\vec{J}_1 \cdot \vec{E}_1 \neq 0 \quad \rightarrow (\omega^2 - k^2 c^2) \vec{E} + c^2 k^2 \vec{E}_x \vec{E}_x = -\frac{i\omega}{\epsilon_0} \vec{J} = \frac{i n_0 e \omega \vec{v}_1}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \omega^2 \epsilon_x = \frac{i\omega_0 \omega c}{\epsilon_0} \left(\frac{e}{\hbar \omega} \right) (i\epsilon_x + \frac{\omega_c}{\omega} \epsilon_y) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \epsilon_y = -\frac{i\omega_0 \omega c}{\epsilon_0} \left(\frac{e}{\hbar \omega} \right) (i\epsilon_y - \frac{\omega_c}{\omega} \epsilon_x) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$\left[\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right] \epsilon_x + \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \epsilon_y = 0 \quad (1)$$

$$\left[\left(\omega^2 - c^2 k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right] \epsilon_y - \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \epsilon_x = 0 \quad (2)$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (\omega^2 - \omega_p^2) \left[\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] = \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \right)^2$$

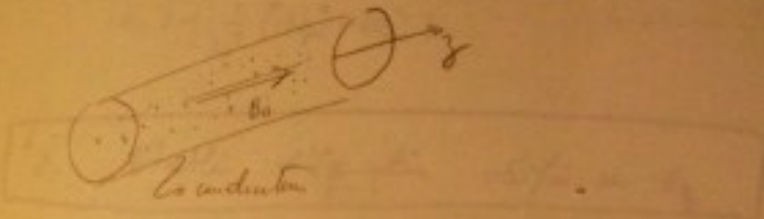
$$\rightarrow \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$$

$$4) \text{ As } (\omega^2 - \omega_p^2) \epsilon_x + \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \epsilon_y = 0$$

Because $\omega_p \neq \omega$ and $\epsilon_y = 0$ for $\epsilon_x \neq 0$ $\vec{E} \parallel \vec{k}$
electrostatic

Complément : Encadré = texte

Recherche d'une onde dans un cylindre dans un fort champ magnétique longitudinal



Les équations de Maxwell s'écrivent, pour le champ perturbé et dans le plan

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1 & \text{div } \vec{B}_1 = 0 \\ \text{rot } \vec{B}_1 = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1 & \text{div } (\vec{\epsilon} \vec{E}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\epsilon} = \vec{1} + \frac{i}{\omega \epsilon_0}$$

1- Recherche pour $\omega \rightarrow \infty$, $\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\omega^2} (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2) \end{pmatrix}$ $\Omega^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2$

En effet

$$\sigma_{xx} = i\epsilon_0 \omega \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right) \rightarrow 0$$

$$\sigma_{yy} = -\epsilon_0 \left(\frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right) \rightarrow 0$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} \rightarrow 0 \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xx} \rightarrow 0 \quad \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad \sigma_{zz} = \frac{i\epsilon_0}{\omega} (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2)$$

$$\epsilon_{zy} = 1 + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \left(\frac{i \epsilon_0}{\omega} (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2) \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\omega^2} (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2)$$

2. Etablir l'équation vérifiée par E_z

$$\text{rot}(\text{rot } E_y) = \text{grad}(\text{div } E_y) - \Delta E_y = i\omega \text{rot } B_y$$

$$= (i\omega) \left(-\frac{i\omega}{c^2} \vec{e}_z \cdot \vec{E}_y \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_z \cdot \vec{E}_y$$

Compte tenu de cette égalité

$$-\Delta E_y + \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } E_y) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) E_y \quad \omega^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2$$

P.a. compte de $\text{div}(\vec{e}_z \cdot \vec{E}_y) = 0$

$$\vec{e}_z = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{e}_z \cdot E_y) = \text{div } E_y - \frac{\partial^2}{\omega^2} \text{div}(\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z) E_y =$$

$$= \text{div } E_y - \frac{\partial^2}{\omega^2} \text{div}(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) = 0$$

$$\text{Donc} \quad \text{div } E_y = \frac{\partial^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial z} (\text{div} E_r) = \frac{n^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{rz}$$

Donc finalement, on a

$$-\Delta E_{rz} + \frac{n^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{rz} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right) E_{rz} = 0 \quad E \equiv E_r$$

3. On recherche la solution de cette equation sous la forme

$$E_z(r, \theta, z, t) = \hat{E}_z(r, \theta) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Equation vérifiée par $\hat{E}_z$ - Donner les solutions pour r (facile pour $r=0$)

$$\Delta = \Delta_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

donc

$E \equiv E_r$

$$-\Delta \hat{E}_z - \Delta_r \hat{E}_z + \frac{n^2}{\omega^2} (-k_z^2) \hat{E}_z - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right) \hat{E}_z = 0$$

$$\Delta_r + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right) \hat{E}_z = 0$$

pu la fait

$$\Delta_r \hat{E}_z + \gamma^2 \hat{E}_z = 0$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right)$$

solutions sous la forme

$$E_z = f(r) g(\theta)$$

$$\Delta_r E_g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) g + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right) f = -\gamma f g$$

Donc
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \frac{1}{f} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -\gamma$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \frac{1}{f} + \gamma r^2 = -\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \frac{1}{g} = -\lambda = m^2$$

cutés

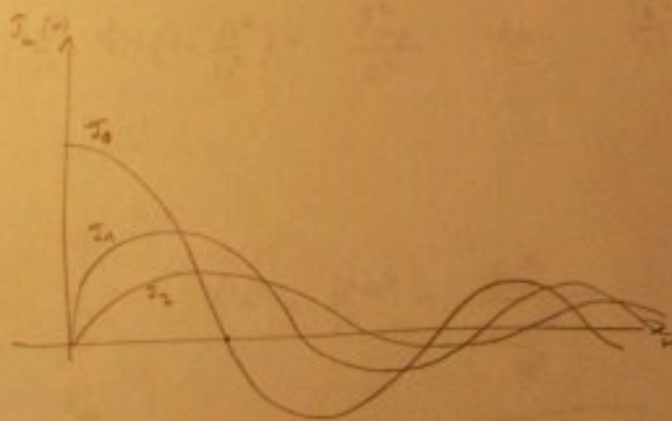
condition pour la solution séparable magnétique

$$g = e^{im\theta}$$

et f est solution de

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \gamma r^2 f = m^2 f$$

sont les solutions finies pour $r=0$ sont les fonctions de Bessel $J_m(\gamma r)$



Les zéros de J_m -5-

m	f_{0p}	f_{1p}	f_{2p}	f_{3p}	f_{4p}
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3702	7,5283
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725

On a donc

$$E = A J_m(r) e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)}$$

4 Calculer la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$, la fonction étant un milieu conducteur. Tracer $\omega = \omega(k)$

On doit avoir $E_z(r=a) = 0$ Composante tangentielle nulle à $r=a$

Donc

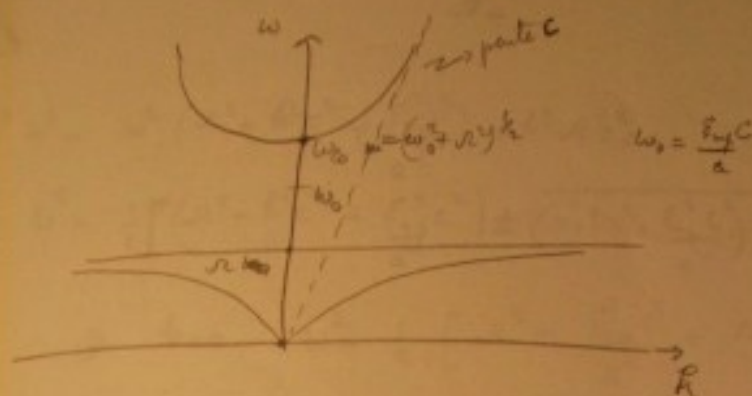
$$r=a = f_{mp} \Rightarrow J_m^2(r) = J_{mp}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right) = \frac{J_{mp}^2}{a^2} \quad \text{soit} \quad \frac{k^2}{c^2} \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right) = \frac{J_{mp}^2}{a^2}$$

$\Rightarrow$

$$k^2 a^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} - \frac{J_{mp}^2}{1 - \frac{n^2}{\omega^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{J_{mp}^2}{a^2 \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right)}}$$



$$k=0$$

$$\frac{\omega^2 a^2}{c^2} = \frac{\epsilon_{inf}^2}{1 - \frac{R^2}{\omega^2}} \rightarrow \left(1 - \frac{R^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega^2}{c^2} a^2 = \epsilon_{inf}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} a^2 = \epsilon_{inf}^2 + \frac{R^2 a^2}{c^2}$$

$$\omega^2 = \frac{\epsilon_{inf}^2 C^2}{a^2} + R^2 = \omega_{p0}^2$$

$$= \omega_0^2 + R^2$$

ω_0 : cutoff du guide d'onde

d'onde. Plaque $\rightarrow$ déplacement vers les hautes fréquences du cutoff du guide d'onde.

* Le milieu se comporte comme un diélectrique $\frac{d\omega}{dk} = 0$ quand on a une onde plane ($\omega \pm \omega_p \pm \epsilon$) - A permet propagation des ondes de Langmuir

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{R^2}{c^2} - k^2 + \frac{k^2 R^2}{\omega^2} = \frac{\epsilon_{inf}^2}{a^2}$$

$$\frac{\omega^4}{c^2} - \frac{R^2 \omega^2}{c^2} - k^2 \omega^2 + k^2 R^2 = \frac{\epsilon_{inf}^2}{a^2} \omega^2$$

$$\omega^2 = \omega^2 \left(n^2 + k^2 c^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right) + k^2 n^2 c^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\left(n^2 + k^2 c^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right) \pm \sqrt{\left(n^2 + k^2 c^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right)^2 - 4 k^2 n^2 c^2} \right]$$

$$\oplus \quad k=0 \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \left[n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} + n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right] = \omega_{k=0}^2$$

$$\ominus \quad k=0 \quad \omega=0$$

$\oplus$:

$$k \rightarrow \infty \quad \omega \approx k^2 c^2$$

$$\ominus: \quad k \rightarrow \infty \quad \omega \approx \frac{1}{2} \left[k^2 c^2 - k^2 c^2 \sqrt{\left(n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right)} \right]$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[k^2 c^2 + n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} - \sqrt{k^4 c^4 \left[\left(1 + \frac{n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2}}{k^2 c^2} \right)^2 - 4 \frac{k^2 n^2 c^2}{k^4 c^4} \right]} \right]$$

$$\approx k^2 c^2 \left(1 + \frac{2 \left(n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right)}{2 k^2 c^2} + \frac{1}{2} \frac{\left(n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right)^2}{k^4 c^4} - \frac{4}{2} \frac{n^2}{k^2 c^2} \right)$$

$\omega \approx$

$$\omega^2 \approx \frac{1}{2} \left[n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} - \left(n^2 + \frac{\epsilon^2 c^2}{a^2} \right) + 2 n^2 \right]$$

$$= n^2 = \omega_k^2$$

— N —

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right), & -\frac{i}{\omega} \left(\frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right), & 0 \\ c.c. & \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\omega^2} (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2) \end{pmatrix}$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & +i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\epsilon} = \mathbb{1} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \bar{\sigma}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{i}{\omega \epsilon_0} \left(-\frac{q}{e} \right) \left(\frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_x \\ \bar{E}_y \\ \bar{E}_z \end{pmatrix} = \underline{\underline{N}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

LICENCE DE PHYSIQUE

Mécanique des milieux continus

I. ELASTICITE

- A) Définition du tenseur des contraintes σ_{ij} .
 B) Ecrire la matrice du tenseur des contraintes σ_{ij} et celui du tenseur des déformations ϵ_{ij} .
 C) Etablir les équations d'équilibre. En élasticité :

relation tensorielle :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

Problème :

a) on suppose que les composantes d'un tenseur sont données par $\sigma_{ij} = x^i x^j$. Quelles sont alors les composantes F_x, F_y, F_z pour que le système soit en équilibre ?

Pour cela réécrire la matrice tenseur des contraintes $\sigma_{ii} = x^2, \dots$

b) Si $F(F_x, F_y, F_z)$ dérive d'un certain potentiel Φ tel que $F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, quel sera la valeur de Φ ?

$$F = \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_y \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = F_z \end{cases}$$

II. VISCOELASTICITE

A) Etablir les relations d'Etat ou de constitution d'un solide

- a) élastique
 b) visqueux
 c) viscoélastique

et ceci pour un barreau linéaire à 1 dimension (cas d'un fil par exemple).

On développera surtout les solides viscoélastiques. (Module et complaisance opérationnel).

b) Etablir les équations de "constitution" par les transformations de Laplace des modèles mécaniques dits de "Maxwell" de "Voigt" et du modèle standard à trois paramètres.

III

Un fluide incompressible, de densité ρ , non visqueux, est limité entre deux sphères concentriques de rayon a et b ($a > b$). La sphère extérieure est soumise à une pression constante de module P , les forces de pression s'exerçant de façon concentrique (voir figure 1). Les forces de gravitation sont négligées.

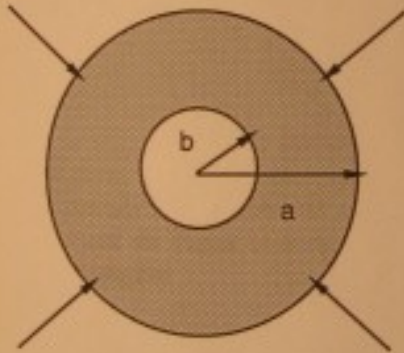


Figure 1

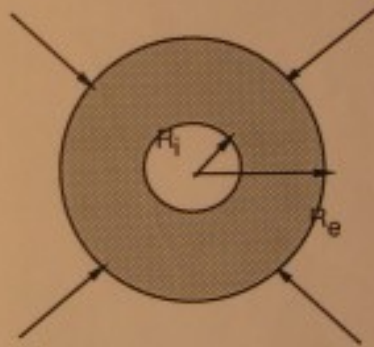


Figure 2

On supprime, à partir de l'instant $t=0$, la sphère intérieure. Le fluide a alors un mouvement concentrique, la vitesse a la forme $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_r$ ou $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire radial. On désire connaître $v(r,t) = \frac{dr}{dt}$.

1. Sachant que $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial(r^2 v_r)}{r^2 \partial r}$ ici, montrer que $r^2 v(r,t) = f(t)$.
2. Dédire de l'équation d'Euler une relation, notée 1) donnant la pression $p(r,t)$ en fonction de ρ , r , $v(r,t)$ et $\frac{df}{dt}$.

3. A l'instant t , le liquide est limité par 2 sphères de rayons R_i et R_e (voir figure 2). Sur la sphère de rayon R_i , la vitesse est V_i , la pression est nulle ; sur la sphère de rayon R_e , la vitesse est V_e , la pression est P . Le volume de fluide étant constant, montrer que $R_e^3 - R_i^3 = a^3 - b^3$.

Déduire de 1) une relation entre P , ρ , R_e , R_i , V_e , V_i à l'instant t . On utilisera $\frac{d\kappa}{dt} = V_i \frac{d\kappa}{dR_i}$.

4. Obtenir une équation différentielle reliant $\frac{d(R_i^2 V_i)}{dR_i}$, R_i , V_i , P et ρ . Indiquer, sans calculs, comment on peut obtenir R_i et V_i . Montrer que ceci permet d'avoir $f(t)$ et donc $r(t)$.

Rep III)
 $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (v_r r)}{\partial r}$ Cond. cylindrique
 $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

$\text{div } \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega_r)$ $\vec{U} = v(r, t) \vec{r}$

$U_\theta = v(r, t) r$

$\text{div } \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v(r, t)) = 0$

$\Rightarrow r^2 v(r, t) = f(t)$

Equation des fluides parfaits incompressibles donne Poisson

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial r}$

remarque

$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}$

$\hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$

la projection sur $\vec{r}$:

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) v$

$\vec{U} = v_r \vec{e}_r$

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r}$

$\vec{U} \cdot \nabla = v_r (\vec{e}_r \cdot \nabla)$
 $= v_r \frac{\partial}{\partial r}$

relation permettant de trouver $f(t)$ si on connaît $v(r, t)$

soit (2)

Dériver $f(r, t)$

$v(r, t) = \frac{f(t)}{r^2}$

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$

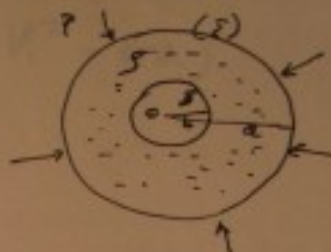
$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f'(t)}{r^2}$

la seule dépendance explicite du temps est dans $f(t)$.

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f'(t)}{r^2} + v \frac{\partial v}{\partial r} \sim \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} v^2$

$\Rightarrow -\frac{1}{\rho} p = - \frac{f'(t)}{r} + \frac{1}{2} v^2 + H(t)$

$$\left(\frac{P}{\rho} = \frac{f'(t)}{t} - \frac{1}{2} v^2 + H(t) \right)$$



R_i



$R_i, V_i, V_e, R_e(t)$.

$$R_e^3 - R_i^3 = a^3 - b^3$$

Volume de fluide constant
 $R_e^3 - R_i^3 = a^3 - b^3$

Conditions aux limites:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{f'(t)}{R_i} - \frac{1}{2} V_i^2 + H(t)$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{f'(t)}{R_e} - \frac{1}{2} V_e^2 + H(t)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho} = f'(t) \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right) - \frac{1}{2} (V_e^2 - V_i^2)$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{d}{dt} (R_i^2 V_i) \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right) - \frac{1}{2} (V_e^2 - V_i^2)$$

$$f'(t) = r^2 \frac{\partial v_r}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} (R_i^2 V_i)$$

$$= \frac{d}{dt} (R_e^2 V_e)$$

car

$$\frac{\partial}{\partial t} (r^2 v_r) = 0$$

le volume de fluide est constant, hence

$$R_e^3 - R_i^3 = a^3 - b^3 = d^3$$

De (2), donner la relation entre $P, \rho, R_e, R_i, V_e, V_i$ à l'instant t .

Après V_i est fonction de R_i $R_i V_i^2 = f(R_i)$

$$V_i = \frac{dR_i}{dt} \quad V_e = \frac{dR_e}{dt}$$

$$\left(\frac{V_e}{V_i}\right)^2 = \left(\frac{P(H)}{R_e^2} \frac{R_i^2}{f(H)}\right)^2$$

derivation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dR_i} \right) V_i$$

$$\frac{I}{g} = V_i \frac{d(R_i^2 V_i)}{dR_i} \left(\frac{1}{(R_i^3 + d^3)^{1/3}} - \frac{1}{R_i} \right) - \frac{V_i^2}{2} \left(\frac{V_e^2}{V_i^2} - 1 \right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{R_i}{R_e} \right)^4 = \frac{R_i^4}{(R_i^3 + d^3)^{4/3}}$$

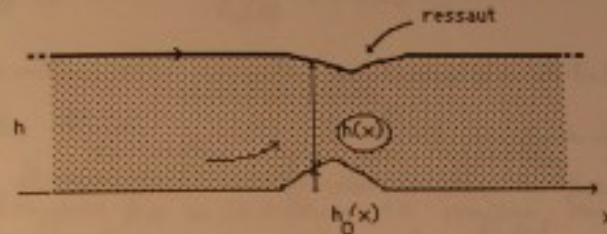
$$\frac{I}{g} = V_i \frac{d(R_i^2 V_i)}{dR_i} \left(\frac{1}{(R_i^3 + d^3)^{1/3}} - \frac{1}{R_i} \right) - \frac{V_i^2}{2} \left(\frac{R_i^4}{(R_i^3 + d^3)^{4/3}} - 1 \right)$$

$\Rightarrow V_i = V_i(R_i) \Rightarrow R_i^2 V_i(R_i) = f(R_i) \rightarrow f(R_e)$

Mécanique des Fluides

Question 1 : Ressaut hydraulique.

Soit l'écoulement d'un fluide incompressible en mouvement stationnaire, en présence d'un obstacle représenté par la fonction $h_0(x)$ (voir figure). Le système est invariant par translation dans la direction perpendiculaire au plan de la figure.



On note U la vitesse du fluide en amont de l'obstacle et h l'épaisseur du fluide, $U(x)$ et $h(x)$ ces quantités en un point d'abscisse x . La surface libre du fluide est à la pression atmosphérique p_0 , la vitesse est supposée uniforme dans toute section droite.

1) De la conservation du débit et de la relation de Bernoulli, déduire l'équation

$$(E) \quad \frac{1}{U(x)} \frac{dU(x)}{dx} (-gh(x) + U^2(x)) + g \frac{dh_0(x)}{dx} = 0 \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

2) On appelle Nombre de Froude la quantité $F(x) = \frac{U^2(x)}{gh(x)}$ et on suppose que le nombre de Froude est inférieur à 1 en amont de l'obstacle. Montrer que 2 régimes d'écoulement sont possibles, l'un pour lequel ce nombre de Froude reste inférieur à 1, l'autre (appelé supercritique) pour lequel ce nombre peut devenir supérieur à 1, en considérant cet écoulement autour du point maximum de l'obstacle.

3) Soit un obstacle tel que $h_0(x) = 0$ pour $|x|$ grand. Montrer la relation

$$Fr_1^{1/3} Fr_2^{1/3} (Fr_1^{1/3} + Fr_2^{1/3}) = 2$$

où Fr_1 et Fr_2 sont les nombres de Froude loin en amont et loin en aval de l'obstacle. On utilisera l'équation (E). Que peut-on en déduire sur les valeurs de Fr_1 et Fr_2 par rapport à 1?

Question 2

Donner, en commentant, l'expression des forces exercées par un fluide non visqueux en mouvement stationnaire, sur les parois d'une canalisation de section variable, dans laquelle le flot a lieu.

Remant hydraulique

Eq: $h = U(x) h(x)$

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho U(x)^2 + \rho g (h(x) + \frac{z(x)}{g})$$

on derive $\boxed{U(x) \frac{dh}{dx} + h(x) \frac{dU}{dx} = 0}$

$$\boxed{\rho U \frac{dU}{dx} + \rho g \left(\frac{dh}{dx} + \frac{dz}{dx} \right) = 0}$$

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + g \left(\frac{1}{U^2} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{U^2} \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{U}{U^2} \frac{dh}{dx} = - \frac{h(x)}{U^2} \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{U(x)}{U h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{U^2} \frac{dU}{dx} = 0 \leftarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dx} = - \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \frac{U h}{U(x)}$$

$\Rightarrow$

- 1 -

$$\rho U \frac{dU}{dx} + \rho g \left(-\frac{1}{U^2} \frac{dU}{dx} U h \right) + \rho g \frac{dh_0}{dx} = 0$$

$$\frac{dU}{dx} \left(U - g \frac{U h}{U^2} \right) + \rho g \frac{dh_0}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \left(U^2 - g h(x) \right) + \rho g \frac{dh_0}{dx} = 0$$

$$(1) \quad \boxed{\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (U^2 - g h(x)) + g \frac{dh_0}{dx} = 0} \quad \frac{U h}{U^2(x)} = \frac{U(x) h(x)}{U^2(x)} = \frac{h(x)}{U(x)}$$

2) on appelle nombre de Froude la quantité

$$Fr = \frac{U(x)^2}{g h(x)}$$

et on suppose que le nombre de Froude $Fr < 1$ en amont de l'obstacle.

Amont maximum. $\frac{dh_0}{dx} = 0 \rightarrow$

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dh}{dx} = 0$$

le nombre de Froude est < 1 au franchissement du maximum de l'obstacle.

~~et $\frac{dh_0}{dx} < 0$ en aval~~

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (U^2 - g h(x)) = -g \frac{dh_0}{dx} < 0 \quad \frac{dh_0}{dx} > 0 \text{ l'obstacle est}$$

si $U^2(x)$ est inférieur à $g h(x)$ et $(Fr(x) < 1)$

si $\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} > 0$ U croît en restant inférieur à $g h(x)$

Juste à l'endroit où l'écoulement est maximum ($\frac{dh}{dx} = 0$) on pose et on a $\frac{dh}{dx} = 0$ donc $Fr(x) < 1$

2^o cas Au point, $U^2(x) = gh(x)$ le nombre de Froude atteint la valeur 1

En passant le point, $\frac{dh}{dx} < 0$,

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (U^2(x) - gh(x)) = -g \frac{dh}{dx} > 0$$

Ceci est possible si $\frac{dU}{dx} > 0$ et $U^2(x) - gh(x) > 0$.
la vitesse augmente et le nombre de Froude devient > 1
après (écoulement supercritique).

Justin: l'écoulement est en régime d'écoulement sous critique,
Un jour lorsqu'il le nombre de Froude est < 1 , l'écoulement
supercritique pour lequel ce nombre peut devenir > 1 , on
se considère l'écoulement autour d'un point
maximal de l'obstacle.

3) Soit un obstacle tel que $h_0(x) = 0$ pour $|x|$ grand

l'écoulement est relatif

$$Fr_1^{1/3} Fr_2^{1/3} (Fr_1^{1/3} + Fr_2^{1/3}) = 2$$

où Fr_1 et Fr_2 sont les nombres de Froude loin en amont

et loin en aval de l'obstacle. On utilise l'équation (1) -

si $Fr_1 < 1$ l'écoulement est sous critique on peut dire l'inverse pour $Fr_2 > 1$

$$\text{Ref: } \frac{1}{U(x)} \frac{dU}{dx} (-gh(x) + U^2(x)) + g \frac{dh}{dx} = 0$$

$$\text{Soit } Q = U(x) h(x)$$

$$\frac{1}{\rho(x)} \frac{d\rho}{dx} \left(-g \frac{Q}{U(x)} + U^2(x) \right) + g \frac{dh_0}{dx} = 0$$

$$+ g Q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{U(x)} \right) + \frac{1}{2} \frac{dU^2}{dx} + g \frac{dh_0}{dx} = 0$$

$$g Q \left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} \right) + \frac{1}{2} (U_1^2 - U_2^2) = 0$$

Remarque : $U_1 = U_2$ ou bien.

$$g Q = -\frac{1}{2} \frac{(U_1 + U_2)(U_1 - U_2) U_1 U_2}{(U_1 - U_2)}$$

$$g Q = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) U_1 U_2$$

$$Fr_1 = \frac{U_1^2}{g h_1} = \frac{U_1^3}{g (U_1 h_1)} = \frac{U_1^3}{g Q}$$

$$Q = U_1 h_1 = U_2 h_2$$

$$Fr_2 = \frac{U_2^2}{g Q} \Rightarrow g Q = \frac{1}{2} (g Q)^{1/3} Fr_1^{2/3} + (g Q)^{1/3} Fr_2^{2/3}$$

$$\Rightarrow 2 = (Fr_1^{2/3} + Fr_2^{2/3}) Fr_1^{1/3} Fr_2^{1/3}$$

de nouveau volume
I Donner l'expression des profils de vitesse par les fluides en mouvement stationnaire dans les parois d'une canalisation dans laquelle a lieu l'écoulement.

Mécanique des Milieux Continus

I Ecoulements potentiels tridimensionnels. L'équation d'Euler peut être mise sous la forme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad} (p) + \vec{T}$ où $\vec{\omega} = \vec{rot}(\vec{v})$ et $\vec{T}$ est une force externe (par unité de masse). L'écoulement est supposé potentiel, d'où $\vec{\omega} = 0$ et barotrope c'est à dire $p = p(\rho)$ où p est la pression et ρ la masse volumique du fluide.

$$\text{Soit } P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')}.$$

1) Montrer que le potentiel des vitesses φ_1 tel que $\vec{v} = \text{grad}(\varphi_1)$ vérifie l'équation (E1) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P \cdot u = f(t)$ où $f(t)$ est une fonction du temps (Cauchy Lagrange). Soit $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \int_0^t f(s) ds$. Montrer que φ_1 vérifie une équation du type (E1) où le second membre est nul. Quel est le lien avec l'équation de Bernoulli ?

2) L'équation de continuité est $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\text{grad} \varphi) = 0$ Montrer que $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt}$ où $a = a(P)$ est tel que $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. En déduire le système que doivent vérifier P et φ .

3) Dans le cas incompressible et stationnaire, φ vérifie l'équation de Laplace $\Delta \varphi = 0$. Pourquoi ? Soit la solution suivante de cette dernière équation $\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}$ où $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ correspondant à une source (si $Q > 0$) ou à un puits (si $Q < 0$) situé en (x_0, y_0, z_0) .

Montrer que l'on obtient une autre solution de $\Delta \varphi = 0$ en prenant $\varphi = M \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$ où M est une constante. Cet écoulement est celui d'un

douplet, de moment M , dirigé suivant l'axe ox et situé en (x_0, y_0, z_0) .
Donner l'expression du potentiel dans le cas d'un doublet dirigé dans une direction quelconque.

11 Une sphère fixe, de rayon R est disposée dans le flot stationnaire d'un fluide de viscosité μ , incompressible, de masse volumique ρ . La vitesse $\vec{v}_0$ du flot, loin de la sphère, est horizontale

s suivant l'axe ox . Soit $Re = \frac{\|\vec{v}_0\| R}{\nu}$ le nombre de Reynolds ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$). Il

est supposé très inférieur à 1; le terme convectif peut être alors négligé devant le terme de viscosité dans l'équation de Navier Stokes.

1) Montrer que la vitesse du fluide doit vérifier les équations suivantes, avec p la pression dans le fluide :

$$(S1) \quad \text{grad}(\vec{p}) = \mu \Delta \vec{v} \quad (S2) \quad \text{div}(\vec{v}) = 0$$

les conditions aux limites étant (S3)

$$\vec{v} \big|_{r=R} = 0 \quad v_x \big|_{r \rightarrow \infty} = v_0$$

$$v_y \big|_{r \rightarrow \infty} = v_z \big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2) On recherche la solution de ce système sous la forme

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\alpha} \quad \text{où} \quad \vec{\nabla} \phi \big|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}_0. \text{ Montrer que } \phi \text{ peut être choisi sous la}$$

forme $\phi = v_0 x + a \frac{\partial r}{\partial x} + b \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}$ où a et b sont 2 constantes. Donner l'expression de $\Delta(r)$ et de $\Delta(r^{-1})$. Dédurre de la condition (S2)

l'équation vérifiée par ϕ . Donner alors une expression de $\vec{\alpha}$ en fonction de a , r et x . Donner a et b en fonction de v_0 et R pour satisfaire (S3).

3) A l'aide de (S1), calculer la pression p dans le fluide en fonction de μ , v_0 , R , x et r .

4) Quelle est la force exercée par le flot sur la sphère (formule de Stokes) en fonction de μ , v_0 et R .

Rappel: Sur une surface fixe, les composantes de cette force, par unité

de surface, sont $f_i = p n_i - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) n_k$ $i = 1, 2, 3$ (n_1, n_2, n_3)

étant le vecteur normal unitaire extérieur à cette surface. D'autre

$$\text{part } \Delta(f(r)) = r^{-2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right)$$

Écoulement potentiels Tridimensionnels

l'équation d'Euler pour un fluide non visqueux

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{f}$$

où $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$ et $\vec{f}$ est une force ^{externe} (par unité de masse) $\vec{f} = +\text{grad} U$ devant d'un potentiel U , $\vec{f} = +\text{grad} U$ si l'écoulement est ^{irrotationnel} potentiel, $\vec{\omega} = 0$ et barotrope (ou $\vec{\omega} = 0$ et barotrope) où $\rho = \rho(p)$. Soit $P(p)$

1) Montrer que le potentiel des vitesses φ_1 tel que $\vec{v} = \text{grad} \varphi_1$ vérifie l'équation

$$(E_1) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P - U = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction du temps arbitraire (Formule de Cauchy (après)). Soit $\varphi_2 = \varphi_1 - \int f(t) dt$. Montrer que φ_2 vérifie une équation de type (E1) où le second membre est nul.

Quel est le lien avec l'équation de Bernoulli ?

2) l'équation de continuité est

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\text{grad} \varphi_1) = 0$$

$$\text{Montrer que } \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt} \quad \text{où } a = a(P)$$

$$\text{soit tel que } a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

En déduire le système qui doit être vérifié par φ_1 .

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} =$$

$$dS = \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{dt} =$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{dS}{dt} + \Delta\varphi &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\text{grad}\varphi)^2}{2} + S - u &= 0 \end{aligned}}$$

3) Dans le cas incompressible ^{et stationnaire} ρ rempli l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Pour faire ? . Soient la solution nulle de l'équation de Laplace

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r} \quad \text{où } r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

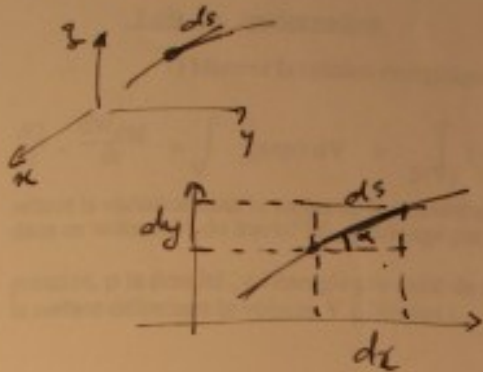
Correspondant à une source (si $Q > 0$) ou à un puits (si $Q < 0$) situé en (x_0, y_0, z_0)

Montrer que l'on obtient une source virtuelle de $\Delta\varphi = 0$ en prenant $\varphi = M \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$ où M est une constante

cet écoulement est celui d'un doublet, de moment M , dirigé suivant Ox situé en (x_0, y_0, z_0) .
Donner l'expression du potentiel dans le cas d'un doublet dirigé dans une direction quelconque.

— N —

$$\varphi = M \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) = M \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial z}{\partial s} \right]$$



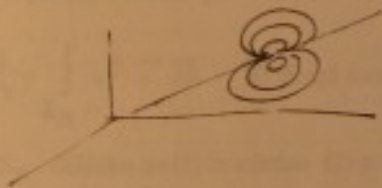
$$\frac{dz}{dx} = ds \cos \alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \cos \beta \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \gamma$$

$$\varphi = M \left[-\frac{(x-x_0)}{r^3} \cos \alpha + \frac{(y-y_0)}{r^3} \cos \beta - \frac{(z-z_0)}{r^3} \cos \gamma \right]$$

$$= -\frac{M}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{s}_0$$

$\vec{s}_0$ direction du doublet



Lois de conservation

1) Montrer la relation énergétique

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \rho) dV + \int_{S(V)} (p + \epsilon \rho) \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

reliant la variation dans le temps de la quantité de chaleur Q cédée ou créée par un fluide dans un volume V , du travail W_{ext} échangé par le fluide avec le milieu extérieur; p est la pression, ρ la densité, ϵ l'énergie par unité de masse, $\vec{v}$ la vitesse du fluide; $S(V)$ est la surface délimitant le volume V à l'instant t .

2) Dans le cas particulier où le fluide n'échange pas de chaleur et de travail avec l'extérieur, où le flot est stationnaire, où les variations d'énergie potentielle et d'énergie interne sont négligeables, montrer la relation

$$(1) \quad \int_{S(V)} \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

3) Le fluide étant incompressible, soit $S(V)$ la surface délimitant un tube de courant. On appelle A l'aire d'une section droite Σ_A de ce tube, V la vitesse moyenne à travers Σ_A , α le paramètre défini par

$$\alpha = \frac{1}{A V^3} \int_{\Sigma_A} v^2 \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad d\vec{S} \text{ dirigé dans le sens du flot. On suppose } p, \rho$$

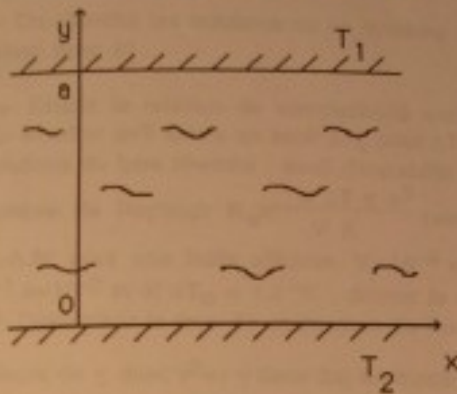
constants sur Σ_A . Dédurre de (1) la relation (2) $p + \frac{1}{2} \rho V^2 \alpha = \text{constante}$ le long du tube de courant.

4) Dans une canalisation cylindrique de rayon R , un fluide incompressible de densité ρ , dans un état stationnaire, est en présence d'un obstacle. Le flot en amont de l'obstacle a un profil constant d'amplitude v_0 à travers Σ_1 alors qu'on mesure un profil linéaire en aval à travers Σ_2 . En coordonnées cylindriques, à travers Σ_2 , $v_x = v_y = 0$, $v_z(r) = U_0 \frac{r}{R}$. Calculer la différence de pression $p_2 - p_1$ entre les deux sections Σ_2 et Σ_1 en fonction de ρ et v_0 à l'aide de (2).

$$5) \text{ De la formule d'Euler } \vec{F} = \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \rho v^2 \vec{n} dS \text{ où } \vec{F} \text{ est la somme}$$

des forces extérieures et des forces de pression agissant sur le tube de courant limité par Σ_2 et Σ_1 , calculer la force exercée par le fluide sur l'obstacle en fonction de R , ρ et v_0 .

Instabilité de Rayleigh Bénard.



Un fluide est contenu entre 2 plaques horizontales espacées de la distance a et portées à des températures différentes T_1 et T_2 . On considère le couplage entre les variations de température au sein du fluide et les champs d'écoulement de ce fluide. Les 2 équations qui gouvernent ce cas sont : l'équation de la chaleur et l'équation de Navier Stokes. La masse volumique varie avec la température qui elle-même varie en fonction de la vitesse du fluide. On a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = K \Delta T$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} p + \nu \rho \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

où K est le coefficient thermique, ν la viscosité, $\vec{g}$ est le champ de pesanteur $(0, -g, 0)$. Les 2 plans horizontaux sont supposés infinis dans les directions x et z .

1- Quand le fluide est au repos ($\vec{v}=0$), déterminer la distribution d'équilibre de température $T_0(y)$. Soient $\rho_0(y)$ et $p_0(y)$ les masses volumiques et la pression dans le fluide dans ce cas. Donner la relation entre $\frac{dp_0}{dy}$, ρ_0 et g .

2- Quand le fluide n'est pas en équilibre, on considère les petites perturbations autour de l'équilibre précédent, avec $v_x=0$ et $v_z=0$.

$$\begin{aligned} T(x,y,t) &= T_0(y) + \theta(x,t) & \theta(x,t) &= \delta T(x,t) \\ p(x,y,t) &= p_0(y) + \delta p(x,t) \\ \rho(x,y,t) &= \rho_0(y) + \delta \rho(x,t) \\ v_y(x,t) &\neq 0 \quad (\text{petit}) \end{aligned}$$

Les variations relatives de masse volumique $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$ et les variations de température θ

sont reliées par la relation $\frac{\delta \rho}{\rho_0} = -\alpha \theta$ où α est un paramètre constant.

Etablir les 2 équations linéarisées, vérifiées par v_y et θ , au 1^{er} ordre des perturbations (approximation de Boussinesq).

3- On cherche les solutions de ce système sous la forme $v_y = v_0 e^{(\gamma t) \cos(kx)}$ (idem pour θ)

3a- Etablir la relation de compatibilité entre γ , V , k , K , α , g , a et $\Delta T = T_2 - T_1$;

3b- Montrer qu'il existe un seuil ΔT_c pour ΔT au delà duquel le champ de vitesse a des solutions du type cherché : seuil d'instabilité de Rayleigh Bénard. On désigne par

nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu K}$ (sans dimension)

3c-A.N: pour une huile silicone, $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $K = 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Avec $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $a = 10^{-2} \text{ m}$ et $\Delta T_c = 1.7^\circ \text{K}$, donner la valeur de R_{ac} pour ΔT_c . Calculer k .

3d- Déterminer le taux de croissance de l'instabilité au voisinage de R_{ac} (faibles valeurs de γ , avec $\gamma^2 \ll \gamma$ dans 3a) en fonction de $\frac{Ra - R_{ac}}{R_{ac}}$, V , K et k .

.....

Flots bidimensionnels irrotationnels incompressibles.

La transformation $\zeta \Rightarrow z = C(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta})$ $0 \leq \lambda \leq 1$, $C \geq 0$, transforme un cercle de rayon unité dans le plan ζ en une ellipse dans le plan z . Soit $\zeta = e^{i\theta}$ et $z = x + iy$.

1- Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'équation de l'ellipse. Déterminer a et b en fonction de C et λ et inversement C et λ en fonction de a et b .

2- Déterminer le potentiel complexe $F(\zeta)$ d'un flot uniforme à l'infini, d'amplitude U_0 faisant un angle α avec l'axe horizontal, autour d'un cylindre de section circulaire de rayon unité.

3- En déduire le potentiel complexe du même flot autour d'un cylindre de section elliptique de demi axes a et b . Rem: quand $|\zeta| \Rightarrow \infty$, $|z| \sim C |\zeta|$.

.....

Instabilité de Rayleigh Bénard

Ré: 1) Equilibre. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ $v = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Donc } T(y) = T_2 + \left(\frac{T_1 - T_2}{a}\right) y$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \vec{g} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} = +g}$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0$$

$$\text{Donc } p_0 = p_0(y)$$

2) Quand le fluide n'est pas en équilibre, on considère les petites perturbations ~~de~~ autour de l'équilibre précédent, avec $v_x = 0$ $v_z = 0$.

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \theta(x, t) \quad , \quad \theta(x, t) = \delta T(x, t)$$

$$p(x, y, t) = p_0(y) + \delta p(x, t)$$

$$g(x, y, t) = g_0(y) + \delta g(x, t)$$

$$v_y(x, y, t) \neq 0 \quad (1.17)$$

les variations relatives

de la densité $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$ et des variations de température θ

sont reliés par $\frac{\delta \rho}{\rho_0} = -\alpha \theta$ où α est une ^{constante} paramètre

établis les deux équations linéaires, simplifiées par v_y , et θ , on s'occupe des perturbations. (approximation de Boussinesq)

Ref: $\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} T_0 = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right)$

cad. $\left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_y \left(\frac{T_1 - T_2}{a} \right) = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right]$

autres Notations:

"2^e" $\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial p_0}{\partial y} \right) + \rho \Delta v_y - \rho g$
 2^e ordre

$\rho = \rho_0 + \delta \rho$

au 1^{er} ordre $\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{\partial p_0}{\partial y} + \rho_0 \Delta v_y - \rho_0 g - \delta \rho g$
 $\underbrace{\quad}_{=0}$

cad $\frac{\partial v_y}{\partial t} = + \nu \Delta v_y - \frac{\delta \rho}{\rho_0} g$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \Delta v_y + \alpha g \theta \right]$

3. On cherche les solutions de ce système sous la forme

a) $v_y = v_0 e^{\gamma t} \cos kx$ (idem pour θ)
 $\theta = \theta_0$

On établit la relation de compatibilité entre

$\gamma, \nu, k, \alpha g, a$ et $\Delta T = T_2 - T_1$

3.b) Montrer qu'il existe un seuil $\Delta T / \text{cm}$ ou ΔT au delà duquel le fluide se met en mouvement a des solutions de

type (1) : Seuil d'instabilité de Rayleigh Bénard.

On définit par l'indice de Rayleigh $Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu \kappa}$
(sans dimension).

AN : pour une huile Silicone $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$\kappa = 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Avec $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $a = 10^{-2} \text{ m}$ et

$\Delta T_c = 1,7^\circ \text{K}$. 3.b Donner la valeur de Ra_c pour ΔT_c .

24: $Ra_c = \frac{10^{-3} \times 9.81 \times 1.7 \times 10^{-6}}{10^{-4} \times 10^{-7}} = 1703.7$

3.c Justifie et détermine théoriquement la dépendance de Ra_c d'après
3.b pour la valeur de Ra_c .

3.d Déterminez le taux de croissances de l'instabilité γ
au voisinage de Ra_c (faible valeurs de γ), ou $\gamma^2 \ll \gamma$ dans 3.c
en fonction de $\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$, γ , κ , α et g .

----- N -----

Convection Hydrodynamique

Instabilité de Rayleigh Bénard

Complément

Equation de la chaleur

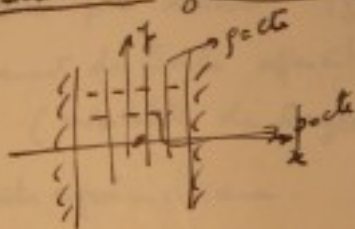
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \kappa \Delta T$$



Equation de Navier Stokes (avec force de pesanteur).

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}$$

- gradient horizontal de température. Stationnaire, $\vec{v}=0$



$$T(x) = T_0 + \Delta T \frac{x}{d}$$

$$\rho = \rho(T)$$

$$\delta \rho = \rho(x) - \rho_0 = -\rho_0 \alpha \Delta T \frac{x}{d} = -\rho_0 \alpha \delta T$$

$$\rho(x) = \rho_0$$

$$z = 0$$

$$v=0$$

$$\text{grad } p_0 = \rho_0 \vec{g}$$

ρ_0 pression d'équilibre.

$$p_0 = p_0(y)$$

— N —

isotherme?

ρ_0 est isotherme

$$\rho = f(p) \text{ barotrope}$$

$$\rho = \rho_0 \equiv p = p_0$$

écoulement stationnaire

"y"

0

$$v_x = v_x(x)$$

$$v_y = v_y(x)$$

$$v_z = v_z(x)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

*

incompressible.

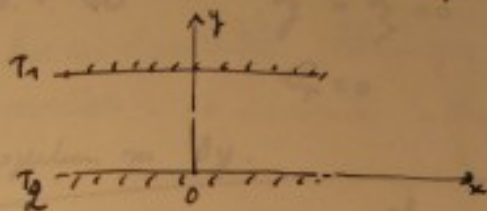
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$v_x = 0$$

vitesses nulle
aux parois

Instabilité de Rayleigh-Bénard. (Guyon, Hulin, Petit) Hydrodynamique physique

2 plaques horizontales à Temp. $\neq$.



$\vec{y} \parallel \vec{\nabla} T \parallel \vec{g}$.

si $T_2 < T_1$
stratification
stable.

si $T_2 > T_1$ (fluide
chauffé par dessous,
situation instable)

instable car particule faible densité en dessous
de celle forte densité ($\rho \downarrow \Rightarrow T \uparrow$)

Mouvement de fluide apparaît lorsque $\Delta T > \Delta T_c$
(instabilité de Rayleigh Bénard)

$$\frac{L}{\delta} = R_T$$

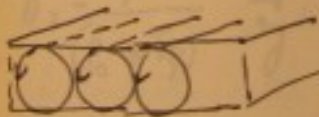
Instabilité expérimentale.

• $\Delta T < \Delta T_c$: échanges de chaleur sont diffusifs uniquement.

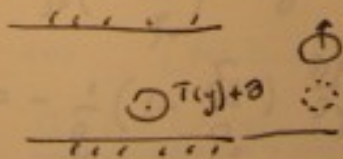
• $\Delta T = \Delta T_c$: mise en mouvement de fluide

$\Rightarrow$ Rouleaux : Diamètre $\approx$ distance interfaçes

pour $\Delta T > \Delta T_c$, la vitesse du fluide dans le rouleau $\uparrow$



Détermination théorique du seuil ΔT_c
Mécanisme qualitatif.



- si $\theta > 0$, $T \uparrow$ et $\rho \downarrow$ et le
mouvement est ascendant.

- Affaiblissement local des couches
inférieures plus chaudes $\rightarrow$ renforcement
de la perturbation initiale.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$v_x = 0$$

En projection sur ∂y .

$$0 = -\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

$$\rho(x) = \rho_0 + \delta \rho \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - g \rho(x) + \rho(x) \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

$$\text{avec } \left(\frac{\delta}{\rho_0} \right) \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - g(\rho_0 + \delta \rho) + (\rho_0 + \delta \rho) \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = \rho_0 g$$

$$0 = -\frac{1}{(\rho_0 + \delta \rho)} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0 \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right)} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (\text{Pr } \gg 1)$$

La diffusion de la chaleur et la viscosité ne l'empêchent pas, le processus pourra s'auto-entretenir.

C'est le mécanisme stabilisant.

La conductivité thermique diffuse la perturbation de température - la viscosité atténue la perturbation de vitesse. Conditions de démarrage : valeur relative des constantes de temps d'échange de chaleur et de quantité de mouvement.

$$\text{Nombre de Prandtl } Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

$Pr \gg 1$ (fluides visqueux)

Vitesse du fluide : variable rapide et réagit instantanément au changement de force verticale dues aux variations de densité.

Température : variable lente

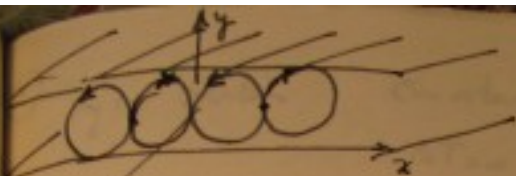
Supposons que ρ est la mise en équation

Mécanisme des particules déplacées de leur point d'équilibre. Ici, on note cette force verticale et par suite l'amplification de l'instabilité.

Où $Pr \ll 1$ (mercure) contraire

Critère physique d'instabilité ($Pr \gg 1$)

Particule opaque de rayon R



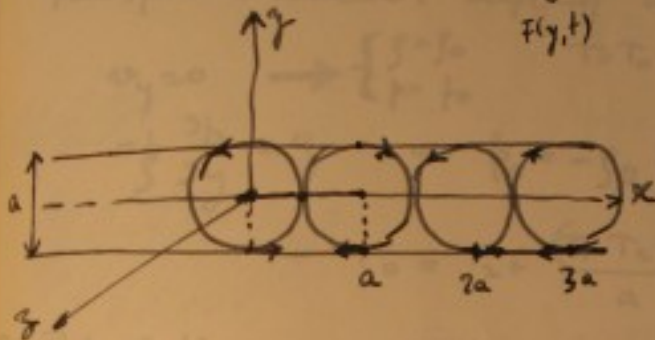
$\vec{v}$ independent of z

$$v_y(x, t) = v_{y0}(t) \cos kx.$$

$\downarrow$
 $F(y, t)$

$$k = \frac{\pi}{a}$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$



$$\frac{\partial v_y}{\partial t} +$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$v_x = v_x\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{t}{a}\right)$$

$$v_y = v_y\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{t}{a}\right)$$

$$v_z = v_z\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{t}{a}\right)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_y \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{t}{a} \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \nu \Delta v_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \kappa \Delta T \end{aligned}}$$

3) Recherche la solution sous la forme

on cherche la solution sous la forme

$$v_y = v_y(x, t) = v_0 e^{\frac{\delta t}{\tau}} \cos kx$$

$$\gamma v_0 = \gamma k^2 v_0 + \alpha g \theta_0$$

$$\frac{\delta T}{a} v_0 = \gamma k^2 v_0 + \alpha g \theta_0$$

3.2) Relation de compatibilité

$$(\gamma + \gamma k^2) v_0 = + \alpha g \theta_0$$

$$\frac{\delta T}{a} v_0 = (\gamma + \gamma k^2) \theta_0$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma + \gamma k^2}{\frac{\delta T}{a}} = \frac{+ \alpha g}{(\gamma + \gamma k^2)}$$

$$\left(\frac{\gamma}{\delta} + \nu k^2\right) \left(\frac{\gamma}{\delta} + \kappa k^2\right) - \alpha g \frac{\Delta T}{a} = 0$$

4 solutions car γ :

$$\gamma^2 + \gamma(\nu + \kappa)k^2 + \nu\kappa k^4 - \alpha g \frac{\Delta T}{a} = 0$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ -k^2(\nu + \kappa) \pm \sqrt{k^4(\nu + \kappa)^2 - 4(\nu\kappa k^4 - \alpha g \frac{\Delta T}{a})} \right\}$$

3b) Le limite de convection $\gamma = 0$.

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

$$\nu\kappa k^4 - \alpha g \frac{\Delta T}{a} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta T > \Delta T_c \\ \nu\kappa k^4 - \alpha g \frac{\Delta T}{a} < \nu\kappa k^4 - \alpha g \frac{\Delta T_c}{a} = 0 \\ -4(\nu\kappa k^4 - \alpha g \frac{\Delta T}{a}) > 0 \quad \text{Ⓢ} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\Delta T_c}{a} = + \frac{1}{\alpha g} \nu\kappa k^4}$$

$$\begin{aligned} \Delta T > 0 \\ \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\alpha g \Delta T_c = a \nu\kappa k^4$$

$$Ra_c = \frac{\alpha \Delta T_c g a^3}{\nu\kappa} = \frac{a^4 \nu\kappa k^4}{\nu\kappa} = k^4 a^4$$

3c)

$$k^4 a^4 = 1700$$

$$\begin{aligned} &\leq 10 \times 10 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$ka = 44$$

$$Ma \rightarrow (ka)^2 = (2^2)^4 \pi^4 \approx 100 \times 256 = 25600$$

$$ka = 2\pi$$

-9-

$$R_{ac} = \frac{\alpha g \Delta T_c a^3}{\gamma K}$$

valeurs expérimentales
 $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

$$a = 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\Delta T_c = 1.7^\circ \text{K}$$

$$K = 10^{-7} \text{ W}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\gamma = 10^{-4} \text{ W}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{huile silicone.}$$

$$R_{ac} = \frac{10^{-3} \times 9.81 \times 1.7 \times 10^{-6}}{10^{-4} \times 10^{-7}} = \frac{1667.7}{1} = 1667.7$$

Déterminer ka $ka^4 = \frac{1667.7}{1} \Rightarrow ka \approx 2\pi$

3d)

Déterminer le taux de conversion γ de l'instabilité en régime de R_{ac} (faibles valeurs de γ). Négliger γ^2

$$\gamma(\gamma + K) k^2 + \gamma K k^4 - \alpha g \frac{\Delta T}{a} = 0$$

$$\frac{\gamma(\gamma + K) k^2}{\alpha g} + \frac{\gamma K k^4}{\alpha g} - \frac{\Delta T}{a} = 0$$

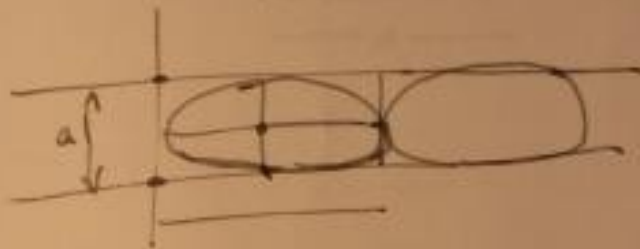
$$\frac{\gamma(\gamma + K) k^2}{\alpha g} + \frac{\Delta T_c}{a} - \frac{\Delta T}{a} = 0$$

$$\frac{\gamma(\gamma + K) k^2}{\alpha g} = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{a}$$

$$ka = 2\pi$$

$$(ka)^4 = (2\pi)^4 = 16 \times 148,28 \approx 1900$$

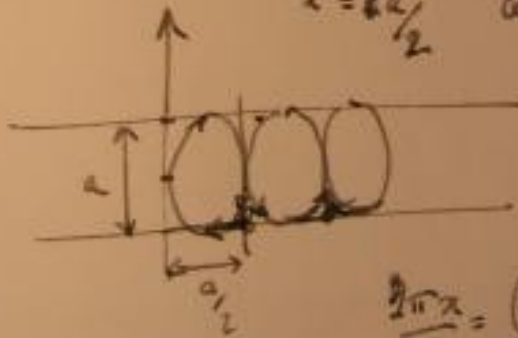
Value expérimentale $R_{0c} = 1708$



$$\cos kx = \cos\left(\frac{2n}{a}x\right)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{81}{16}$$

$$x = \frac{2a}{2} \quad \cos\left(\frac{2n}{a} \cdot \frac{a}{2}\right) = \cos n$$



$$\frac{2n}{a}x = (2h+1)\frac{\pi}{2}$$

$$h=0 \quad \frac{2n}{a}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow ax = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4}$$

$$J_0 \left(\frac{\Delta T - \Delta T_c}{a} \right) \frac{[\alpha g] \gamma K h^2}{(\gamma + K) h^2 \times h^2 \gamma K}$$

$$\boxed{\gamma = \left(\frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c} \right) \frac{\gamma K h^2}{(\gamma + K)} = \left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right) \frac{\gamma K h^2}{(\gamma + K)}}$$

À l'écoulement du scint, la convection est lente

longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\gamma K}$$

— N —

Diffusion de la rotation pour un fluide visqueux.

Soit $\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V}(\vec{x}, t)$ la vorticité d'un fluide visqueux incompressible de coefficient de viscosité cinématique ν , le champ de vitesse est $\vec{V}(\vec{x}, t)$.

1) Dédurre des équations de Navier Stokes l'équation pour $\vec{\omega}$ suivante (on néglige les forces de pesanteur)

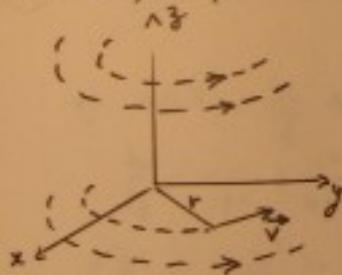
$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (1)$$

Rappel : $\frac{1}{2} \nabla^2 V^2 + \nabla \times \vec{V} \wedge \vec{V} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

2) On suppose que le mouvement est plan et invariant par translation le long de Oz vertical : $u_3 = 0$, $u_1 = u_1(x, y, t)$, $u_2 = u_2(x, y, t)$, $\vec{V} = (u_1, u_2, 0)$ en coordonnées cartésiennes. Montrer que $\vec{\omega}(x, y, t) = \omega(x, y, t) \vec{e}_3$, où $\vec{e}_3$ est le vecteur unitaire sur Oz. De l'équation de continuité $\text{div} \vec{V} = 0$ déduire l'équation pour ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

3) A présent, le fluide est animé d'un mouvement de rotation autour de Oz : à tout instant, le champ des vitesses est invariant par rotation autour de cet axe. On utilise les coordonnées cylindriques.



Montrer que $\vec{V} \cdot \nabla \omega = 0$ et que l'équation vérifiée par ω est

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (3)$$

4) Vérifier que (3) admet des solutions de la forme $\omega(r, t) = \frac{\Omega}{t} \exp(-r^2/4\nu t)$.
A l'aide de l'intégrale $\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{e}$ sur un cercle de rayon r dans le plan xOy, calculer le module de la vitesse du fluide $V(r, t)$. Γ étant supposé connu à l'instant initial, quel est le comportement de V pour r grand à t fixé, et t grand à r fixé ?

- Ref 1 -

①

1) Navier Stokes :

$$(2) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} V^2 + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \nu \Delta \vec{V}$$

On applique $\frac{1}{2} \text{rot} = (\mathbf{E})$

$$\text{rot}(\Delta \vec{V}) = \Delta(\text{rot} \vec{V})$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \nu \Delta \vec{\omega}$$

$$2) \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \vec{e}_3$$

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \begin{pmatrix} -\omega u_2 \\ \omega u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega u_2 & \omega u_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \omega u_1 - \frac{\partial}{\partial y} \omega u_2 \\ \frac{\partial}{\partial y} \omega u_2 - \frac{\partial}{\partial x} \omega u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \omega \text{div} \vec{V} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad \text{car } \vec{\omega} \wedge \vec{V} = 0 \rightarrow \text{equation 2)}$$

$$3) \quad \text{grad} \omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{V} \cdot \text{grad} \omega = 0$$

$$\text{et } \Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \rightarrow (3)$$

$$4) \quad \omega(r, t) = \frac{\Omega}{t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\omega}{t} + \frac{r^2 \omega}{4\nu t^2} = \frac{\omega}{t} \left(-1 + \frac{r^2}{4\nu t} \right)$$

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{2r^2}{4\nu t} \omega \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = -\frac{2}{4\nu t} \left(2r \omega + r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

$$= -\frac{2}{4\nu t} \left(2r \omega - r^2 \frac{2r}{4\nu t} \omega \right) \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = -\frac{\Omega}{4\nu t} \left(2 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \omega$$

$$I = \int_0^R \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = 4\pi \int_0^R u du \frac{\Omega}{t} \exp\left(-\frac{u^2}{4\nu t}\right)$$

- Rep 2 -

$$I = \frac{2rV}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right]$$

Module de la vitesse

$$I = \frac{2rV}{R}$$

$$V = \frac{4VR}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right]$$

$$t=0 \quad I(0) = \frac{2rV}{R}$$

$$a) \quad t=t_0 \quad V \propto 0 \quad r \uparrow$$

$$b) \quad r=r_0 \quad V \propto 0 \quad t \uparrow$$

c) Effet de la rotation initiale s'atténue

quand on s'éloigne de l'axe -

b) Atténuation au cours du temps

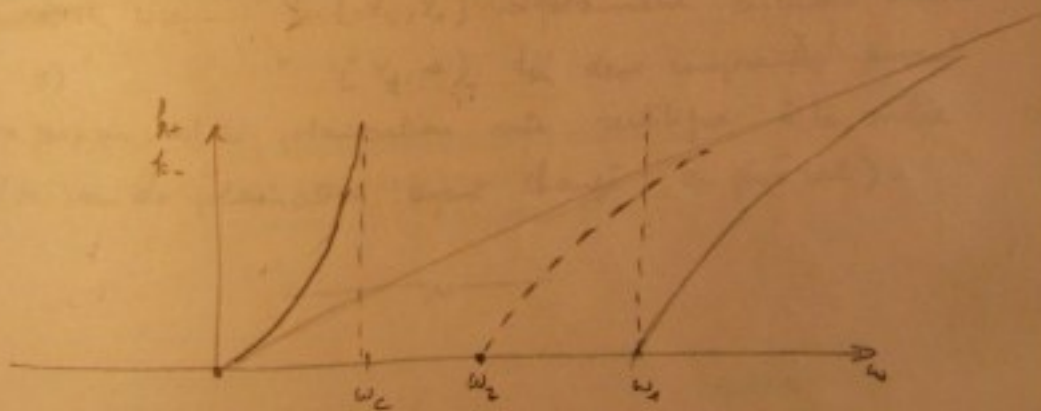
— v —

Q.2

⑤

1) 0+

$$\tilde{E}_+ = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right)$$



$$\omega \nearrow \omega_c \quad (\text{la val. inf}) \quad \tilde{E}_+ \nearrow \infty$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad \tilde{E}_+ \rightarrow 0$$

$$\omega \nearrow \omega_c \quad (\text{la val. sup}) \quad \tilde{E}_+ \rightarrow 0$$

- Ry 3 -

$$k_z = 0 \text{ pour } \omega = \omega_1 = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2} \quad (\text{sol } > 0)$$

$$k_z \text{ réel pour } \omega > \omega_1$$

$$k_z \sim \frac{\omega}{c} \quad \omega \gg \omega_1$$

$$0_- : k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right)$$

$$k_z = 0 \text{ pour } \omega = \omega_2 = \frac{1}{2} (-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}) \quad (\text{sol } > 0)$$

$$\omega_2 < \omega_1$$

AN. $\omega_1 = 16.73 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$

$\omega_2 = 9.62 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$

$$k_z^2 < 0 \text{ pour } \omega < \omega_2$$

$$k_z \sim \frac{\omega}{c} \quad \omega \gg \omega_1$$

2) a) Dans la bande $[0, \nu_c]$, l'onde droite ne peut se propager - polarisation circulaire gauche pour l'onde incidente

x) " " $[\nu_c, \nu_1]$ l'onde de rétrodiffusion ne peut se

propager
+ " " $[\nu_1, \nu_2]$ → polarisation circulaire droite

7) " " $[\nu_2, \infty)$ les deux composantes peuvent se propager et la polarisation reste rectiligne à la sortie (la polarisation ayant changé, en général).

— n —

LICENCE DE PHYSIQUE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I. Flots isothermes compressibles.

Soit un fluide compressible en mouvement isotherme dans une canalisation circulaire. Les échanges de chaleur permettant de maintenir une température constante se faisant par les parois, les effets de friction sur celles-ci sont non négligeables. Le flot est considéré stationnaire.

La canalisation ayant un diamètre D , on considère un volume de fluide de section $\pi \frac{D^2}{4}$ et de longueur dx . Soit τ_0 la force (par unité de surface) exercée par les parois sur le fluide.

1) De l'équation des moments et de l'équation de continuité, montrer que l'on a :

$$-\frac{dp}{dx} - \frac{f}{D} \frac{\rho V^2}{2} = \rho V \frac{dV}{dx} \quad (1.1)$$

où $V \equiv V(x)$ est la vitesse du fluide, $\rho \equiv \rho(x)$ la densité ; f est une constante appelée résistance telle que

$$\tau_0 = \frac{1}{4} f \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right)$$

2) Sachant que le flot est isotherme ($\frac{p}{\rho} = \text{cte}$) et la canalisation de section constante ($\rho V = \text{cte}$), montrer que l'on a

$$\frac{dp}{dx} \left(\rho_1 V_1^2 \frac{p_1}{p} - p \right) = \frac{f}{2D} \rho_1 V_1^2 p_1 \quad (1.2)$$

où p_1, ρ_1 sont des quantités (connues) en un point donné (noté 1).

Intégrer cette équation entre deux points distants de L .

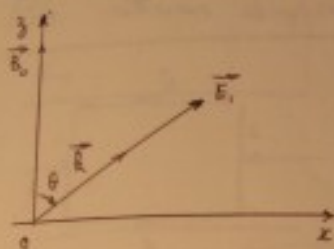
Si $f \frac{L}{D} \gg \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$, donner $p_1^2 - p_2^2$ en fonction de f, L, D, p_1, ρ_1 et V_1 . (1.3)

Application numérique : Le fluide est de l'hélium ($k = 1,66$), $R = 212 \text{ m/°K}$, température = 60°C .

$$V_1 = 90 \text{ m/s} \quad p_1 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Calculer la pression et la vitesse à une distance $L = 60 \text{ m}$; $f = 0,015$, $D = 20 \text{ cm}$.

II. Des ondes électrostatiques électroniques longitudinales se propagent dans un plasma magnétisé dans une direction faisant un angle θ arbitraire par rapport au champ magnétique $\vec{E}_0$ non perturbé dirigé suivant Oz. On choisira l'axe des x tel que $\vec{k}$ et $\vec{E}$ soient dans le plan (x,Oz) (voir figure).



Le champ électrique non perturbé (resp. perturbé) $\vec{E}_0$ est nul (resp. appelé $\vec{E}_1$) ; le mouvement des ions est négligé ; on appelle n_0 (resp. n_1) la densité électronique à l'équilibre (resp. la densité perturbée).

1) Ecrire les équations linéarisées de Poisson, de continuité et du mouvement des électrons pour des ondes monochromatiques de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$.

En déduire la relation de dispersion

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2) + \omega_p^2 \omega_c^2 \sin^2 \theta = 0$$

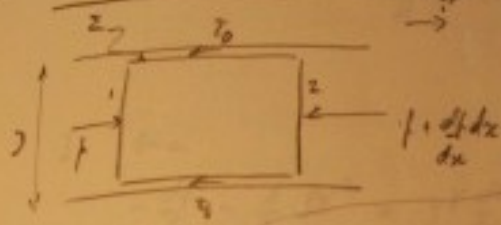
où ω_p (resp. ω_c) est la pulsation plasma (resp. cyclotronique).

2) Considérer les limites $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\theta \rightarrow 0$. Remarques.

3) Représenter schématiquement $\omega = \omega(k_z)$ pour k_x fixé. On distinguera les deux cas $\omega_p > \omega_c$ et $\omega_c > \omega_p$.

- Rep -

2. Flots isothermes compressibles



$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i &= \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV \\ &= \int_V \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dV \\ \text{Continuité } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \quad \text{Stationnaire} \\ \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \Rightarrow \int_V \rho \vec{v} dV = 0 \\ \text{Annulation section constante } \rho v &= \text{cte} \\ (\vec{v} = v \vec{e}_x) \Rightarrow \frac{d}{dt} (v \vec{e}_x) &= 0 \\ \Rightarrow \sum \vec{F}_i &= \int_V \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} dV = \rho v (v_{x_1} - v_{x_2}) S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \left(\sum \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \vec{P} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} X + \int_V \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) \\ &= \left(p - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \right) \frac{\pi D^2}{4} - p_0 \left(-\frac{\pi D}{2} \right) dx \\ &= \int_V \rho v (v_{x_1} - v_{x_2}) S \\ &= \rho v \frac{dv}{dx} dx \frac{\pi D^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dx} \frac{\pi D^2}{4} dx - p_0 \frac{\pi D}{2} dx &= \rho v \frac{dv}{dx} dx \frac{\pi D^2}{4} \\ -\frac{dp}{dx} - p_0 \frac{\pi D}{\pi D^2} &= \rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{\rho}{2} \frac{v^2}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{1}{\rho} = \text{cte}, \rho v = \text{cte} &\rightarrow \rho v = \text{cte} \\ \frac{dp}{\rho} + \frac{dv}{v} &= 0 \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ -\rho \frac{dp}{dx} - \frac{\rho}{2} \frac{v^2}{dx} &= \rho v \frac{dv}{dx} = -\rho v^2 \frac{dp}{dx} = -\rho v_1^2 v \frac{dp}{dx} \\ &= -\rho v_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{dp}{dx} \left(\rho v_1^2 \frac{1}{\rho} - 1 \right) = \frac{\rho}{2} \frac{v^2}{dx}$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \rho_1 V_1^2 \log \frac{p_2}{p_1} - \frac{1}{2} (p_2^2 - p_1^2) = \frac{f}{2D} \rho_1 V_1^2 L$$

$$\Rightarrow p_2^2 - p_1^2 = \frac{fL}{D} \rho_1 V_1^2$$

3. Ou

$$-\frac{dp}{dx} - \frac{f}{D} \frac{\rho V^2}{2} = \rho V \frac{dV}{dx} = -\rho \frac{V^2}{r} \frac{dr}{dx}$$

$$\rho a^2 = \frac{\rho V^2}{\beta p}$$

$$\text{Donc } \frac{dp}{dx} (k a^2 - 1) = \frac{f}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\frac{dp}{dx} \neq 0 \quad \text{pu } a^2 = \frac{1}{k} \quad a = \sqrt{\frac{1}{k}}$$

AN:

$$p_1 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$V_1 = 90 \text{ m/s}$$

$$\beta = \frac{p}{\rho R T} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{89 \times 212 \times 333}$$

$$= \frac{1,5 \cdot 10^6}{691840} = 2,168 \text{ kg/m}^3$$

$$T = 273 + 60 = 333$$

$$90.91 \quad p = \frac{RT}{\beta}$$

β : poids molaire
constante des gaz

$$p_2^2 = p_1^2 - \frac{fL}{D} \rho_1 V_1^2$$

$$= (1,5 \cdot 10^6)^2 - \frac{0,015 \times 60}{0,2} \times 1,5 \cdot 10^6 \times 2,168 \times (90)^2 \quad \frac{A}{\mu} = 4,8 \times 252$$

$$= 2,25 \cdot 10^{12} - 118530 \cdot 10^6 = (2,25 - 0,118) \cdot 10^{12} = 2,13 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2$$

$$p_2 = 1,459 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \quad V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{1,459 \cdot 10^6} \times 90 = 93,10 \text{ m/s}$$

Licence de Physique
Mécanique des milieux continus

I. On soumet une poutre d'un matériau (garniture de frein) à des sollicitations transversales

1) Etablir l'équation aux valeurs propres.

2) Calculer le module de Young en N/m^2 de ce matériau pour deux fréquences propres données pour les deux cas suivants :

a) La poutre est encastree a une des extremités et libre à l'autre

b) La poutre est encastree aux deux extremités

On sait que dans le cas des vibrations transversales, le mouvement est régi par l'équation :

$$EI Y'''' - \mu \omega^2 Y = 0$$

et la solution générale est

$$Y = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$$

avec $\alpha^4 = \mu \omega^2 / EI$

μ = masse linéique = $\rho b h$

ρ = masse volumique K/m^3

I = moment d'inertie $bh^3/12$

E = module de Young en N/m^2

Pour établir l'équation aux valeurs propres, on rappelle qu'à la solution générale il faut adjoindre les conditions aux limites pour les deux cas, et rendre nul le déterminant des coefficients.

Une fois trouvées les équations aux valeurs propres, on sait que les solutions de ces équations sont :

1er cas :

$$\alpha_1 l = \beta_1 = 1,194 \pi/2$$

$$\alpha_2 l = \beta_2 = 2,989 \pi/2$$

2ème cas :

$$\alpha_1 l = \beta_1 = 3,011 \pi/2$$

$$\alpha_2 l = \beta_2 = 5,00 \pi/2$$

On donne : $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$

$$l = 20 \text{ cm}$$

$$h = 0,5 \text{ cm}$$

1er cas : $N_1 = 63,5 \text{ Hz}$

$$N_2 = 397,7 \text{ Hz}$$

2ème cas : $N_1 = 403,5 \text{ Hz}$

$$N_2 = 1115 \text{ Hz}$$

Problème - Module Licence Mécanique des milieux continus

On soumet une ^{poutre} poutre d'un matériau (garantie de flex) à des sollicitations transversales.

A/ Etablir l'équation aux valeurs propres; B/ Calculer le module d'Young en N/m^2 de ce matériau pour 2 fréquences propres données pour les deux cas suivants

1) la poutre est encastée à une des extrémités et libre à l'autre.

2) la poutre est encastée aux deux extrémités.

On sait que dans le cas des vibrations transversales le mouvement s'écrit par l'équation

$$EI y^{IV} - \mu \omega^2 y = 0$$

et la solution générale est

$$y = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$$

avec $\alpha^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$

μ = masse linéique = $\rho b h$

ρ = masse volumique kg/m^3

I = moment d'inertie m^4/m

E = Module d'Young en N/m^2

Pour établir l'équation aux valeurs propres, on rappelle que la solution générale, il faut adjoindre les conditions aux limites pour les deux cas et résoudre un déterminant des coefficients.

Une fois trouvée les équations aux valeurs propres, on sait que les solutions de ces ~~trois~~ équations sont.

1^{er} cas

$$\begin{cases} \alpha_1 l = \beta_1 = 1,194 \pi / 2 = 1,876 \\ \alpha_2 l = \beta_2 = 2,989 \pi / 2 = 4,694 \end{cases}$$

2nd cas

$$\begin{cases} \alpha_1 l = \beta_1 = 3,141 \pi / 2 = 4,730 \\ \alpha_2 l = \beta_2 = 5,007 \pi / 2 = 7,854 \end{cases}$$

On donne

$\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$

$l = 20 \text{ cm}$

$h = 0,5 \text{ cm}$

1^{er} cas $\begin{cases} N_1 = 63,5 \text{ Hz} \\ N_2 = 397,7 \text{ Hz} \end{cases}$

2nd cas $\begin{cases} N_1 = 403,5 \text{ Hz} \\ N_2 = 1115 \text{ Hz} \end{cases}$

A) Equation aux valeurs propres

1°) poutre encastée à une des extrémités et libre à l'autre
les conditions aux limites sont.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y''(l) &= 0 \\ y'(0) &= 0 & y'''(l) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & -\sin \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & \sin \alpha l & -\cos \alpha l \end{vmatrix} = 2(1 + \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l) = 0$$

Ce qui donne.

$$\operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l = -1$$

solutions données

$$\alpha_1 l = \beta_1 = 1,875$$

$$\alpha_2 l = \beta_2 = 4,714$$

2°) poutre encastée aux 2 extrémités

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y(l) &= 0 \\ y'(0) &= 0 & y'(l) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & \sin \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & -\sin \alpha l & \cos \alpha l \end{vmatrix} = 2(1 - \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l) = 0$$

Ce qui donne

$$\operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l = 1$$

solutions données

$$\alpha_1 l = \beta_1 = 4,730$$

$$\alpha_2 l = \beta_2 = 7,854$$

B Calcul du module d'Young

Nous avons $\kappa^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$ $\omega = \kappa^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$ or $N = \frac{\omega}{2\pi}$

soit $N = \frac{\kappa^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

on a donc $\beta = \kappa l$

$\kappa^2 = \frac{\beta^2}{l^2}$

$N = \frac{\beta^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI b h^3}{12 \rho b h}} = \frac{\beta^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{E h^2}{12 \rho}}$

$N^2 = \frac{\beta^4}{4\pi^2 l^4} \cdot \frac{E h^2}{12 \rho}$

$E = \frac{N^2 \times 4\pi^2 l^4 \times 12 \rho}{h^2 \beta^4}$

$E = 48 \pi^2 \rho \left[\frac{l^2}{h} \cdot \frac{N}{\beta^2} \right]^2$

1^{er} Cas

$\begin{cases} \beta_1 = 1,876 \\ N_1 = 63,6 \text{ Hz} \end{cases}$

$E \Rightarrow 23,69 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$\begin{cases} \beta_2 = 4,694 \\ N_2 = 397,7 \end{cases}$

$E \Rightarrow 23,71 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

2^{es} Cas

$\begin{cases} \beta_1 = 4,730 \\ N_1 = 403,5 \text{ Hz} \end{cases}$

$E \Rightarrow 23,67 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$\beta_2 = 7,854$

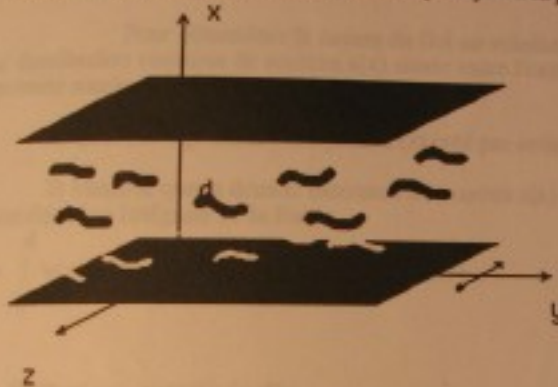
$N_2 = 1115 \text{ Hz}$

$E \Rightarrow 23,77 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Licence de Physique
Mécanique des Milieux Continus

A .

Un fluide visqueux incompressible, de viscosité ν , est situé entre 2 plans (infinis), l'un parallèle à yoz , à la distance d de l'origine, étant maintenu fixe, l'autre effectuant un mouvement oscillatoire sinusoïdal dans son plan yoz à la pulsation ω .



Il s'agit de déterminer le mouvement composé d'ondes transversales d'amplitude variable qui est induit dans le fluide. On utilisera les notations complexes.

1) Les solutions sont cherchées de la forme :

$$u_x = 0, u_y = v, u_z = 0$$

Montrer que v vérifie l'équation : $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ (1) et que la pression peut être considérée constante.

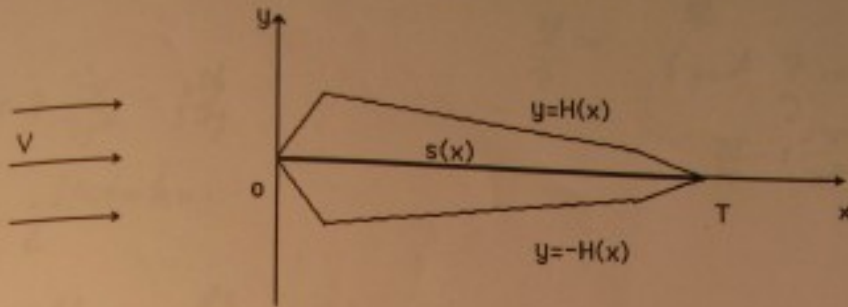
2) Donner la forme générale des solutions élémentaires de (1) en ondes planes, de pulsation ω et de vecteur d'onde k . Donner $k(\omega)$. Expliciter les solutions vérifiant les conditions aux frontières :

$$v(0,t) = v_0 \exp(-i\omega t); v(d,t) = 0.$$

3) Déterminer la force par unité de surface exercée par le fluide sur le plan mobile et sur le plan fixe.

B . Flot de fluides incompressibles irrotationnels.

Un fluide non visqueux incompressible en mouvement irrotationnel bidimensionnel, à la vitesse V (parallèle à Ox) est en présence d'un obstacle de forme symétrique (par rapport à Ox) quelconque, $y = \pm H(x)$.



Pour déterminer la nature du flot au voisinage de cet obstacle, on constitue une distribution continue de sources $s(x)$ située entre l'extrémité 0 de l'obstacle et l'autre extrémité située en T à la distance d de 0.

- 1) Quel est le potentiel complexe $F(z)$ créé par cette distribution ?
- 2) Montrer que la densité inconnue de sources $s(x)$ peut être obtenue comme solution d'une équation intégrale de la forme

$$0 = \int_0^d s(x') G(x, x') dx' .$$
 Déterminer $G(x, x')$.

C . Diffusion rotationnelle

Un fluide visqueux, de viscosité ν , est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical oz. A tout instant, le champ des vitesses est invariant par rotation autour de cet axe, et invariant par translation le long de cet axe. On utilise les coordonnées cylindriques.

On appelle vorticité le vecteur $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V}(x, t))$. Soit $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

Alors, ω vérifie l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

Vérifier que cette équation admet des solutions de la forme

$$\omega(r, t) = \frac{\Omega}{t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right).$$

A l'aide de l'intégrale $I = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$ calculée sur un cercle de rayon r dans le plan

xoy, calculer le module de la vitesse du fluide $V(r, t)$. I étant supposé connu à l'instant initial, quel est le comportement de V pour r grand à t fixé et t grand à r fixé.

①

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$v = v_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

$$-i\omega = -\nu k^2$$

$$k^2 = + \frac{i\omega}{\nu}$$

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \sqrt{i} = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} (1+i)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} (1+i)$$

$$v = e^{-i\omega t} (A \sin kx + B \cos kx)$$

$$v(d, t) = 0$$

$$v(0, t) = B e^{-i\omega t} = v_0 e^{-i\omega t} \quad B = v_0$$

$$v(d, t) = e^{-i\omega t} (A \sin kd + B \cos kd) = 0$$

$$A = -B \cot kd$$

$$= -v_0 \cot kd$$

$$v = e^{-i\omega t} (-v_0 \cot kd \sin kx + v_0 \cos kx)$$

$$= v_0 e^{-i\omega t} \left(\frac{\sin kx \cos kd + v_0 \cos kx \sin kd}{\sin kd} \right)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} (1+i)$$

$$v(x, t) = v_0 e^{-i\omega t} \frac{\sin(k)(x+d)}{\sin kd}$$

$$3) f_x = -k^2 \frac{v_0 e^{-i\omega t}}{\sin kd} \sin(k(x+d))$$

$$\text{For } x=0 \text{ and } x=d$$

step 1 =

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

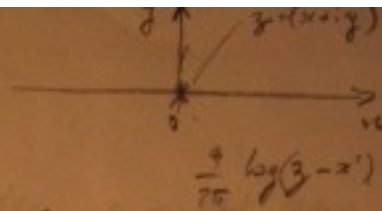
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

2

$$k_y = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$B) i) \frac{F}{z} = \int_0^d \frac{f(x')}{2\pi} \log(z-x') dx'$$



$$z = x + iy$$

$$\log(z-x') = \log(x+iy-x')$$

$$z = x + iy$$

$$= \log \sqrt{(x-x')^2 + y^2} + i \operatorname{Arg} \frac{y}{x-x'}$$

$$F(z) = \varphi + i\psi$$

Don

$$\psi = \int_0^d \frac{f(x')}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{y}{x-x'} dx'$$

$$2) \psi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm H(x)$$

$$0 = \int_0^d \frac{f(x')}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{H(x)}{x-x'} dx$$

$$\text{Don } \delta(x, x') = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{H(x)}{x-x'}$$

$$c) I = \int \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{CS}} \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint 2w(r, t) r dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R w(r, t) r dr$$

$$= 2\pi V_r$$

$$I(t) = 4\pi \frac{\Omega}{t} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} \frac{dr^2}{2}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{4\eta \Omega}{r} \left(e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} - 1 \right)$$

Exercice . 1) Soit un fluide incompressible en contact avec une surface plane illimitée oscillant (dans son plan) en mouvement oscillatoire de fréquence ω .

Déterminer le mouvement induit dans le fluide. Montrer que des ondes transversales peuvent se développer, leur amplitude décroissant exponentiellement dans l'intérieur du fluide. (on utilisera les équations complexes). Calculer la force par unité de surface, exercée par le fluide sur la plaque.

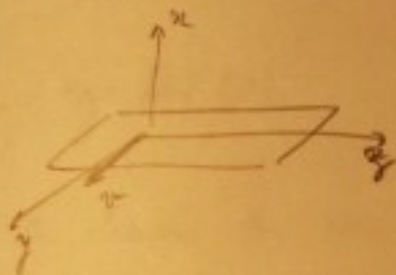


2) Le fluide est entre deux plans (infinitésimaux), l'un étant immobile fixe, l'autre effectuant un mouvement oscillatoire dans son plan. Déterminer la force par unité de surface sur le plan mobile, et sur le plan fixe.



Rep: la vitesse du plan oscillant est, prise par xy
 on fait $\omega t + \varphi = 0$
 $v = V_0 \cos(\omega t + \varphi) = B(v_0 e^{-i\omega t})$
 $v_0 = V_0 e^{-i\omega t}$
 $= \text{Re}(V)$

on calcule avec V et tant que les opérations sont linéaires -
 vitesse du fluide :



vitesse du fluide : $\vec{u}$

tels que $u_x = 0$ $u_y = 0$
 $u_z = 0$ sur le plan

la vitesse du fluide ne peut
 dépendre de z et y , le plan étant infini
 ne dépend que de x

On doit donc avoir, avec $\vec{u} = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad u_x = \text{cte} = 0 \quad (\text{par condition aux bords}).$$

$$\text{Donc} \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \left(u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{u}(x) = 0$$

On a tout d'abord

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{u}$$

"x" →

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \rightarrow p \text{ ne dépend pas de } x; \text{ car comme}$$

(Plan infini) $p = \text{cte}$

- NSIC -

$$\partial_{tt} \vec{u} = \gamma \Delta \vec{u}$$

Le mouvement de l'eau s'effectue en conservant ρy ,
celui de l'onde aussi et

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

$$u_y = \text{Re}(U) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad U = V \text{ en } x=0$$

On cherche les solutions sous la forme

$$U = U_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

On a donc

$$-i\omega = \gamma (-k^2) \quad \rightarrow \quad k = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}$$

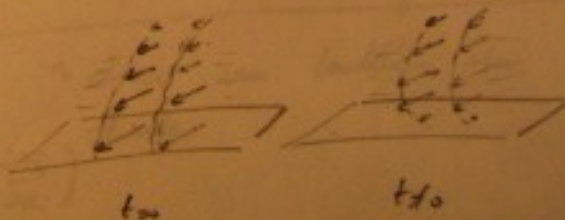
Donc, en ne conservant que la racine +

$$U = U_0 e^{i \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} x - \omega t \right)}$$

$$U = U_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} x} e^{i \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} x - \omega t \right)}$$

$$u_y = U_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} x} \cos \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} x - \omega t \right)$$

On a tracé



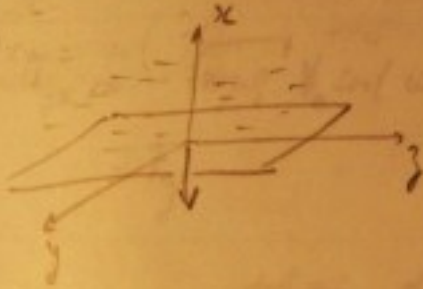
Représentation de pénétration

$$\delta = \frac{\sqrt{2\nu}}{\omega}$$

$$\omega \uparrow \quad \delta \downarrow$$

$$\nu \uparrow \quad \delta \uparrow$$

Force de frottement par unité de surface sur la face
Elle est dirigée suivant oy (*)



$$F_y = -\sigma_{yx} h_k$$

$$\eta_x = -1 \quad \eta_y = \eta_z = 0$$

$$F_y = \sigma_{yx}$$

$$F_x = -\sigma_{xx} \eta_x = \sigma_{xx}$$

$$= -p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$F_z = -\sigma_{zz} \eta_z = \sigma_{zz} = 0$$

$$= -p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

$$= \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \text{à } x=0$$

On peut donner u_y/x . On peut aussi considérer

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\text{avec } U = U_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$= \mu (ik) U = i \mu \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\omega}}{\nu} U = \mu_0 \frac{\sqrt{\omega}}{2\nu} (-1+i) U$$

$$= \mu_0 \frac{k}{2}$$

$$(*) \quad P_i = -\sigma_{ik} \eta_k$$

η dirige vers l'extérieur de la surface

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{yx}^c = \mu \sqrt{\frac{\omega \rho}{2\mu}} (i-1) \bar{U} \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{\omega \mu \rho}{2}} (i-1) \bar{U} \Big|_{x=0}$$

$$= \sqrt{\omega \mu \rho} \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}} \right) \bar{U} \Big|_{x=0}$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$

$$\sigma_{yx}^c = -\sqrt{\omega \mu \rho} e^{-i\frac{\pi}{4}} \bar{U} \Big|_{x=0}$$

$$\sigma_{yx} = -\sqrt{\omega \mu \rho} V_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi)$$

$$= F_y$$

Force par unité de surface

déphasé de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à u_y .

2) On cherche une solution de

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

sous la forme

$$U = (a \sin kx + b \cos kx) e^{-i\omega t}$$

$$k = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$\begin{cases} U = v_0 e^{-i\omega t} & x=0 \\ U = 0 & x=d \end{cases}$$

$$110 \quad \psi = b e^{-i\omega t} = \psi_0 e^{-i\omega t} \quad \rightarrow \text{for } \psi_0$$

$$111 \quad 0 = a \sin kx + b \cos kx \quad \rightarrow a = -\psi_0 \frac{\cos kx}{\sin kx}$$

$$\psi = \psi_0 \tan(kx) = -\frac{b}{a}$$

$$112 \quad \psi = \psi_0 \left(-\frac{\cos kx}{\sin kx} \sin kx + \cos kx \right) e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{\psi_0}{\sin kx} (\cos kx \sin kx - \cos kx \sin kx) e^{-i\omega t}$$

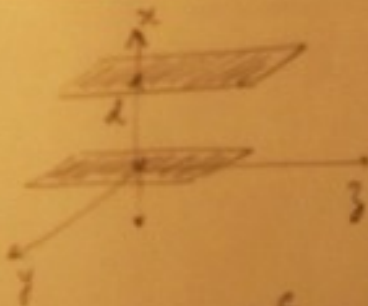
$$\psi = \frac{\psi_0}{\sin kx} \sin kx e^{-i\omega t}$$

$$k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2v}}$$

$$k_y = k(V)$$

Force de frottement

Plan infini



$$F_x = -\sigma_y \eta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\eta_x = -1 \quad \eta_y = \eta_z = 0$$

$$F_y = +\sigma_y \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$\sigma_y \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\sigma_y}{\sin kx} \psi_0 \cos kx e^{-i\omega t}$$

$$= -\psi_0 \sigma_y \cos kx e^{-i\omega t}$$

$$= -\psi_0 \sigma_y \cos(kx) \quad \psi$$

$$F_y = \operatorname{Re}(-k \cos(kd) V)$$

Plan supérieur

$$n_x = 1 \quad n_y = n_z = 0$$

$$F_{zy} = -\sigma_{yx} \Big|_{x=d} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=d}$$

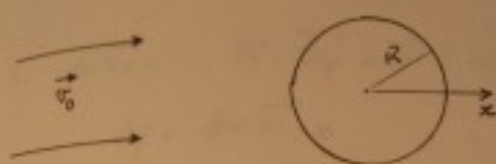
$$F_{zy} = \operatorname{Re} \left(\mu \frac{k u_0}{\sin(kd)} e^{-i\omega t} \right)$$

$$k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

$$(1+i) e^{-i\omega t} = (1+i)(\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ = \cos \omega t + \sin \omega t + i(\cos \omega t - \sin \omega t)$$

$$F_{zy} = \mu \frac{u_0}{\sin(kd)} (\cos \omega t + \sin \omega t)$$

II. Flot de fluide visqueux autour d'une sphère.



Une sphère fixe de rayon R est placée dans le flot stationnaire d'un fluide visqueux (viscosité dynamique μ) incompressible (densité ρ) suivant l'axe x de vitesse $\vec{v}_0$ à l'infini. Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v_0 R}{\mu}$ ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$) est supposé

très inférieur à 1 ; dans ce cas, le terme d'inertie $\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ peut être négligé devant le terme visqueux $\mu \Delta \vec{v}$ dans l'équation de Navier Stokes, et le champ de vitesses doit vérifier, si p est la pression,

$$(S1) \quad \nabla p = \mu \Delta \vec{v}$$

$$(S2) \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

La vitesse doit vérifier les conditions aux limites

$$(S3) \quad \vec{v}|_{r=R} = 0, \quad \vec{v}|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}_0, \quad v_y|_{r \rightarrow \infty} = v_z|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1) La solution de (S1, S2) est cherchée sous la forme $\vec{v} = \nabla \varphi + \vec{w}$ où $\nabla \varphi|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}_0$. Montrer que φ , de la forme $\varphi = v_0 x + C_1 \frac{\partial r}{\partial x} + C_2 \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes, vérifie une telle condition. Calculer Δr et Δr^{-1} .
Déduire de (S2) l'équation vérifiée par φ . De (S2), quelle est alors une expression possible pour $\vec{w}$ en fonction de C_1 , r et x ? Donner C_1 et C_2 en fonction de v_0 et R pour vérifier (S3).

2) De (S1), déduire la pression p dans le fluide en fonction de μ , v_0 , R , x et r .

3) Calculer la force exercée par le flot sur la sphère en fonction de μ , R et v_0 .

Rappel : par unité de surface, les composantes de cette force sur une surface fixe où $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ est la normale extérieure par rapport au fluide, sont $f_i = p n_i - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) n_k$ (indices répétés sommés). Noter aussi $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ (S2).

$$\text{N.B. : } \Delta f(r) = r^{-2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right).$$

- Ref 1 -

$$1. \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi + \vec{\omega} \rightarrow \Delta \varphi + \text{div } \vec{\omega} = 0$$

$$\vec{\nabla} \varphi|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}_0 \quad (\Leftrightarrow \omega|_{r \rightarrow \infty} = 0)$$

$$\varphi = v_0 x + C_1 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + C_2 \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad \Delta r = \frac{2}{r}$$

$$\Delta \varphi = 2C_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \text{div } \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{2C_1}{r} \vec{e}_x = -\frac{2C_1}{r} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{div } \vec{\omega} = -2C_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{v} &= \vec{\nabla} \left(v_0 x + C_1 \frac{\partial r}{\partial x} + C_2 \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \right) - \frac{2C_1}{r} \vec{e}_x \\ &= \vec{\nabla} \left(v_0 x + C_1 \frac{x}{r} - C_2 \frac{x}{r^3} \right) - \frac{2C_1}{r} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \left(v_0 - \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3} \right) \vec{e}_x + x \left(-C_1 r^{-3} - 3C_2 r^{-5} \right) \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_x \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

$$3C_2 = C_1 R^2$$

$$C_2 = \frac{C_1 R^2}{3}$$

$$r=R \quad \left(v_0 + \frac{C_1}{R} - \frac{C_1}{3R} \right) = v_0 + \frac{2}{3} C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{3}{4} v_0 R$$

$$C_2 = \frac{C_1 R^2}{3} = -\frac{3}{4} v_0 R \frac{R^2}{3} = -\frac{v_0 R^3}{4} = C_2$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{\nabla} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{x}{r} \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}} \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \frac{x^2}{r} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{\nabla} \left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

Le terme est nul pour $r=R$ car sinon on ne pourrait jamais avoir $\vec{v}=0$ car le premier terme étant constant.

$$\vec{\nabla}\left(\frac{x}{r}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{-Ry^2 - x^2}{r^3} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}\right) = x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} \frac{xy}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} \frac{xz}{r} \end{array} \right\} \text{ inutile}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r} \vec{e}_y - \frac{1}{r^3} x \vec{e}_x$$

Alors

$$\vec{v} = \left(\omega_0 - \frac{1}{6} \omega_0 \frac{R^2}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{\omega_0 R^3}{r^3} \right) \vec{\nabla} x + \omega \left(-\frac{1}{r^2} \frac{3}{4} \omega_0 R + \frac{R^2}{r^3} \frac{3}{4} \omega_0 R \right) \vec{r}$$

$$\vec{v} = \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R^2}{r^2} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{\omega}_0 - \frac{3}{4} \frac{\omega_0 R^2}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \vec{r}$$

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$$

$$1) \vec{\nabla} p = \mu \vec{\Delta} \vec{u} = \mu \vec{\Delta} (\vec{\nabla} \varphi) = \mu \vec{\nabla} (\Delta \varphi) = \mu \vec{\nabla} \left(2C_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right)$$

$$\Rightarrow p = \mu 2C_1 \left(-\frac{1}{r^3} \frac{x}{r} \right) - \mu \frac{3}{2} \omega_0 R \frac{x}{r^3} = p$$

3) Par raison de symétrie, $f_2 = f_3 = 0$

- Ep 3 -

$$h_k = -\frac{r_k}{r}$$

Stokes system

$$f_x = -\frac{1}{r} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \frac{x_k}{r}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x_k} \frac{x_k}{r} = \frac{\partial v_x}{\partial r} \frac{x_k^2}{r^2} = \frac{\partial v_x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{x_k}{r} = \frac{\partial v_k}{\partial r} \frac{x x_k}{r^2} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{x}{r} = 0$$

$$\text{Donc } f_x = \left(-\frac{1}{r} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)$$

$$\Phi_2 = \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{R^2}{4r^3} \right) v_0 - \frac{3}{4} \frac{v_0 R x^2}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = \left(+\frac{3}{4} \frac{R}{r^2} + \frac{3R^2}{4r^4} \right) v_0 - \frac{3}{4} v_0 R \left[2x \frac{r}{r^3} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{3x^2}{r^4} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{x^2}{r^3} \left(+\frac{2R^2}{r^3} \right) \right]$$

$\stackrel{=0}{=} \text{à } r=R$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{r}{x} \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{3}{2R} v_0 - \frac{3}{4} v_0 R \frac{x^2}{R^4}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{v_0}{R} \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right)$$

- Répte -

Date part

$$\left. \frac{d}{dr} \left(\mu \frac{3}{2} v_0 R \frac{r^2}{4} \right) \right|_{r=R} = \mu \frac{3}{2} v_0 \frac{1}{R^3}$$

Donc

$$f_r = \mu \frac{3}{2} \frac{v_0}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \mu \frac{3}{2} v_0 \frac{r^2}{R^3}$$
$$= \mu \frac{3}{2} \frac{v_0}{R}$$

la force totale est

$$F_r = \int_0^R 4\pi r^2 dr$$

$$\boxed{F_r = 6\pi\eta v_0 R} \quad \text{formule de Stokes}$$

————— η —————

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. On considère l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à trajectoires parallèles dans lequel la pression est constante (ce qui sera vérifié dans tout ce qui suit) et on se propose de caractériser la diffusion due à la viscosité.

Soit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ le champ de vitesses tel que :

$$u_x = u(z, t) \quad u_y = u_z = 0$$

1) Montrer que l'équation de continuité ($\text{div}(\vec{u}) = 0$) est vérifiée et que l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

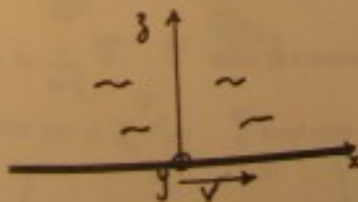
où ν est le coefficient de viscosité cinématique.

2) Vérifier que la solution générale de l'équation (1) s'écrit

$$u = U_0 + U_1 \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\nu t}}} e^{-\tau^2} d\tau \quad (2)$$

où U_0 et U_1 sont des constantes.

3) Le fluide est à présent limité au demi-espace $z > 0$, en contact avec une paroi plane située sur le plan $z = 0$. Le fluide, à l'instant initial, est au repos, ainsi que la paroi. A $t > 0$, la paroi est animée d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{V}$ parallèle à Ox.



a) Montrer que l'on peut trouver U_0 et U_1 dans (2) tel que le flot vérifie ces conditions.
Conclusions. Représenter schématiquement le profil des vitesses à des instants différents.

b) Couche limite. Soit $0 < \eta < 1$ et $\gamma = \frac{z}{\sqrt{1+\eta^2}}$. Montrer que $u > \eta V$ si $\gamma < \gamma_0(\eta)$.
On appelle couche limite δ , la couche de fluide telle que, à t donné, $u > \eta V$. Montrer que $\delta = O(\sqrt{\nu t})$ quand $\nu \rightarrow 0$.

4) Le fluide et la plaque sont maintenant animés d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{V}$ à $t < 0$.
A $t = 0$, la plaque est arrêtée. $u(z, t=0) = V$, $u(z=0, t>0) = 0$. Donner $u(z, t)$.
Sachant que la contrainte tangentielle exercée par le fluide le long de la plaque est $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}(z=0, t)$.
 μ coefficient de viscosité dynamique, exprimer τ . Calculer le coefficient de frottement $C_f = \frac{|\tau|}{\frac{1}{2} \rho V^2}$.

5) On considère à présent deux fluides, de coefficient de viscosité μ et μ' et de densité ρ et ρ' .
Ils occupent les demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$. A l'instant initial, le fluide supérieur (resp. inférieur) est animé d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{V}$ (resp. $\vec{V}'$) dirigé comme précédemment suivant Ox.

La pression est supposée ici aussi constante.

a) Les flots dans les régions $z > 0$ et $z < 0$ étant cherchés sous la forme (2), donner l'expression des constantes en fonction de V, V', μ, μ', ρ et ρ' ($V = |\vec{V}|, V' = |\vec{V}'|$).
les contraintes tangentielles et les vitesses étant continues en $z=0$ pour $t > 0$.

b) Dans le cas de fluides identiques qui sont tels que $V' = -V$, donner le profil de vitesses.
Représenter schématiquement ce profil à des instants différents. Conclusions.

II. Soit un plasma confiné dans une enceinte conductrice cylindrique de rayon a , dans un fort champ magnétique $\vec{B}_0$ dirigé suivant l'axe du cylindre.

Les équations de Maxwell linéarisées s'écrivent, pour les perturbations électromagnétiques et des ondes planes (de pulsation ω)

$$(3) \quad \text{rot } \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1$$

$$(4) \quad \text{rot } \vec{B}_1 = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_1$$

$$(5) \quad \text{div } \vec{B}_1 = 0$$

$$(6) \quad \text{div } (\vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1) = 0$$

où $\vec{\epsilon} = 1 + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}$ étant le tenseur de conductivité.

1) Montrer que si $B_0 \rightarrow \infty$, $\vec{\epsilon}$ tend vers le tenseur

$$\epsilon_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad \text{où } \Omega^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2.$$

ω_{pi} et ω_{pe} étant les pulsations plasma ionique et électronique. On se placera dans ce cas, par la suite.

2) Montrer que l'équation (6) implique $d\vec{\omega}\vec{E}_1 = \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} E_{1z}$. En prenant le $\vec{\omega}t$ de (3) et en considérant la composante z de l'équation obtenue, montrer que E_{1z} vérifie l'équation

$$-\Delta E_{1z} + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{1z} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) E_{1z} = 0$$

3) Les solutions, finies pour $r=0$, de l'équation $r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + r^2 r^2 f = m^2 f$ sont les fonctions de Bessel $J_m(\gamma r)$. Montrer que les solutions de (7) se mettent sous la forme

$$E_{1z} = A J_m(\gamma r) e^{i(kz + m\theta - \omega t)}$$

Donner γ en fonctions ω, c, k et Ω .

4) On appelle ξ_m le 1^{er} zéro de $J_m(r)$. Calculer la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le plasma fortement magnétisé (on rappelle que la frontière de l'enceinte est conductrice).

Tracer schématiquement $\omega = \omega(k)$.

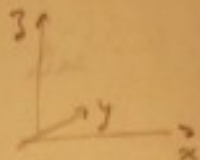
La quantité $\omega_{0m} = \frac{\xi_m c}{a}$ est une pulsation de coupure pour le guide d'onde cylindrique sans plasma. Quel est l'effet de la présence du plasma sur cette pulsation ?

N.B. $\int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

M. M. C

Jun 37.

3



$$\vec{u} = \begin{cases} u_x = u(z, t) \\ u_y = u_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{div } u = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}$$

$$\nabla p = 0 \quad \vec{u} \cdot \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x}$$

Composante x: $\frac{\partial u}{\partial t} + u_x \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$$\Delta u_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$2. \quad u = u_0 + \tilde{u}, \quad \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\nu t}}} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \tau = \frac{z}{\sqrt{4\nu t}}$$

$$= -\tilde{u}_1 e^{-\tau^2} \left(\frac{z}{\sqrt{4\nu}} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) t^{-3/2} = \tilde{u}_2 e^{-\tau^2} \left(-\frac{z}{2\sqrt{4\nu t}} - \frac{1}{t} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \tilde{u}_1 e^{-\tau^2} \frac{1}{\sqrt{4\nu t}} = u_2 e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} \frac{1}{\sqrt{4\nu t}}$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \tilde{u}_1 \frac{1}{\sqrt{4\nu t}} \left(-\frac{z}{2\sqrt{4\nu t}} \right) e^{-\tau^2}$$

l'équation est bien vérifiée

3. a)

$$t=0 \quad u=0 = u_0 + u_1 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = u_0 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

$$t>0 \quad u(z=0, t) = V = \bar{u}_0$$

$$\text{Donc} \quad u = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\nu t}}} e^{-\tau^2} d\tau \right)$$

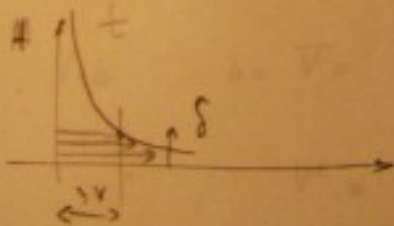
Conclusion: $u \downarrow$ $z \uparrow$ pour t fixé. l'effet de la plaque diminue avec la distance à la plaque. le flot est amené à la vitesse de la plaque pour t assez grand.



$$b) \quad 0 < \eta < 1 \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{4\nu t}}$$

$$u > \eta V \quad \Longleftarrow \quad \int_0^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau < \int_0^{\gamma_0(\eta)} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$\gamma < \gamma_0(\eta) \quad \rightarrow \quad \frac{z}{\sqrt{4\nu t}} < \gamma_0$$



$$\rightarrow \delta < \gamma_0 \sqrt{4\nu t}$$

$$\delta = O(\sqrt{t})$$

$$4. \quad u(z, t=0) = V$$

$$u(z=0, t>0) = 0$$

$$u = U_0 + \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\alpha t}}} \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$t=0 \quad \int \rightarrow \int_0^{\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{Donc } V = U_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} U_1$$

$$u(z=0, t>0) = U_0 = 0 \Rightarrow V = \frac{\sqrt{\pi}}{2} U_1$$

$$\text{Donc } u = \frac{z}{\sqrt{\pi}} V \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\alpha t}}} \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$\tau = \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (z=0, t) = \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} \quad \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} e^{-\frac{z^2}{4\alpha t}} \Big|_{z=0} = \frac{(-1)V}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

$$+ \quad q = \frac{\mu V}{\sqrt{\pi \alpha t}} \frac{1}{2\rho V^2} = \frac{2\sqrt{\rho} V}{\sqrt{\pi \alpha t} \rho V^2} = \frac{2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\pi \alpha t} V} = \frac{C}{t}$$

$$\mu = \frac{\mu}{\rho} = 0(v^{1/2})$$

$$r. \quad u = U_0 + U_1 \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\alpha t}}} \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} e^{-\tau^2} d\tau \quad z > 0$$

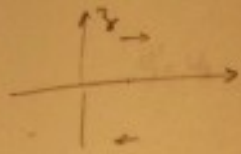
$$u' = U'_0 + U'_1 \int_0^{\frac{z}{\sqrt{4\alpha t}}} \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} e^{-\tau^2} d\tau \quad z < 0$$

$$t=0 \quad u = V = U_0 + U_1 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = U_0 + \frac{U_1 \sqrt{\pi}}{2} = V$$

$$V' = U'_0 - \frac{U'_1 \sqrt{\pi}}{2} \quad \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = -\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

Condition de continuité en $y=0$ pour $t > 0$ de la vitesse

$$U_0 = U'_0$$



Continuité des contraintes tangentielles

$$\tau_1 = \mu \frac{U_1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \quad y > 0$$

$$\tau_2 = \mu' \frac{U'_1}{\sqrt{\pi y'}} e^{-\frac{y'^2}{4t}} \quad y < 0$$

$$\Rightarrow \text{soit } y = \frac{y'}{s} \quad \frac{y}{\sqrt{y}} \frac{U_1}{\sqrt{y}} = \frac{y' s}{\sqrt{y'}} \frac{U'_1}{\sqrt{y'}} \rightarrow s \sqrt{y} U_1 = s' \sqrt{y'} U'_1$$

Donc on a le système

$$U_0 + \frac{U_1 \sqrt{\pi}}{2} = V$$

$$U_0 = U'_0$$

$$U'_0 - \frac{U'_1 \sqrt{\pi}}{2} = V'$$

$$s \sqrt{y} U_1 = s' \sqrt{y'} U'_1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} U_1 \left(1 - \frac{s}{s'} \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{y}} \right) = V - V'$$

$$\text{Donc } U_1 = \frac{V - V'}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{s}{s'} \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{y}} \right)}$$

$$U_0 = V - \left\{ \frac{V - V'}{\left(1 - \frac{s}{s'} \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{y}} \right)} \right\} = U'_0$$

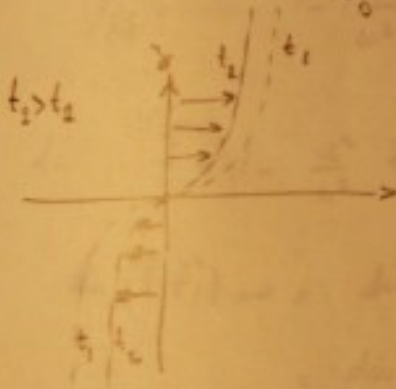
$$U'_0 = \frac{s}{s'} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y'}} \left\{ \frac{V - V'}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{s}{s'} \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{y}} \right)} \right\}$$

b- $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$ $V' = -V$

$U'_1 = U_2$ $U_0 + U'_0 = 0 \Rightarrow U_0 = -U'_0 = U'_0$
Donc $U_0 = U'_0 = 0$

$V = U \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow U_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} V$

et $u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} V \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{4\pi t}}} e^{-\gamma^2} d\gamma$ $\begin{cases} \gamma > 0 \\ \gamma < 0 \end{cases}$



$\gamma < 0 \quad u = \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{-|\gamma|}{\sqrt{4\pi t}}} e^{-\gamma^2} d\gamma$
 $= - \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{|\gamma|}{\sqrt{4\pi t}}} e^{-\gamma^2} d\gamma$

Conclusion : quand $t \rightarrow \infty$ $u \rightarrow 0$ la surface de contact (pour laquelle $u=0$) diffuse vers l'intérieur du fluide.

— o —

1- On a :

$$\sigma_{xx} = i \epsilon_0 \omega \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right) \rightarrow 0$$

$$\sigma_{xy} = -\epsilon_0 \left(\frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \right) \rightarrow 0$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} \rightarrow 0 \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xx} \rightarrow 0 \quad \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad \sigma_{zz} = \frac{i \epsilon_0}{\omega} (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{v^2}{\omega^2}$$

$$2- \quad \vec{\epsilon} = 1 - \frac{v^2}{\omega^2} \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z \quad \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{\epsilon} \vec{E}_1) = 0 = \text{div} \vec{E}_1 - \frac{v^2}{\omega^2} \text{div}(\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z \vec{E}_1)$$

$$= \text{div} \vec{E}_1 - \frac{v^2}{\omega^2} \text{div}(\vec{E}_1 \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{E}_1 = \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} E_{1z}$$

$$\text{rot}(\omega \vec{E}_1) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}_1) - \Delta \vec{E}_1 = i \omega \text{rot} \vec{E}_1$$

$$= (i \omega) \left(-\frac{i \omega}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1 \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1$$

Composante z :

$$-\Delta E_{1z} + \frac{\partial}{\partial z} (\text{div} \vec{E}_1) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{\omega^2} \right) E_{1z}$$

d'où (2)

On cherche la solution sous la forme

$$E_z(r, \theta, z, t) = \hat{E}_z(r, \theta) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\text{but } \Delta = \Delta_T + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta_T \equiv \Delta_T(r, \theta)$$

$$\Rightarrow \left\{ \Delta_T + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \right\} \hat{E}_z = 0$$

$$\hat{E}_z = f(r) g(\theta) \quad r^2 = (r, \theta) \Rightarrow g(\theta) = e^{im\theta}$$

f solution d'une équation de Bessel (qui doit être finie pour $r \rightarrow 0$) d'où

$$E_z = A J_m(kr) e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)}$$

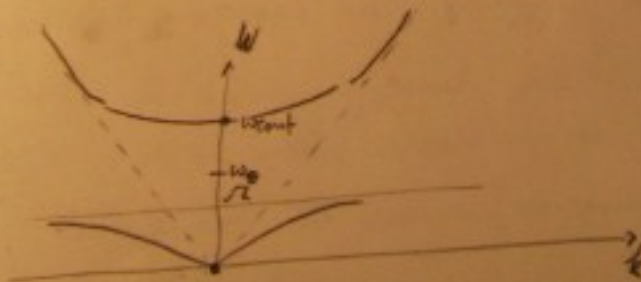
$$r = a \quad E_z = 0$$

$$J_m = J_m \Rightarrow J_m^2 = E_m^2 \Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) = \frac{E_m^2}{a^2}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - k_z^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) = \frac{E_m^2}{a^2}$$

$$k^2 a^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} - \frac{E_m^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow \infty$$



$$h\nu = h^2 \omega^2 \approx \frac{\omega^2 c^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{h}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$$h=0 \quad \frac{h^2 \omega^2}{c^2} = \frac{f_m^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{solution} \quad \omega=0$$

$$\frac{\omega^2 c^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = f_m^2$$

$$\frac{\omega^2 c^2}{c^2} - \frac{v^2 \omega^2}{c^2} = f_m^2$$

$$\omega^2 = \frac{c^2}{c^2} \left(f_m^2 + \frac{v^2 \omega^2}{c^2}\right) = \omega_0^2 + v^2$$

ω_0 : fréquence de coupure de onde

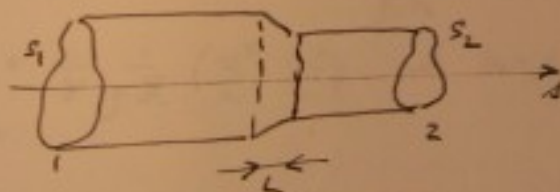
Replacent sur les haute fréquences de la
fréquence de coupure.

— • —

Mécanique des Fluides Continues.

Fluides compressibles.

Soit un fluide compressible en mouvement stationnaire dans une canalisation horizontale présentant une section variant rapidement sur une faible distance (voir figure). Le flot est considéré sans friction et adiabatique. De l'équation de conservation de la masse et de la relation $\frac{v}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = 0$ en v, p et ρ sont les vitesse, pression et masse volumique dans toute section droite ($\rho = \frac{p}{RT}$), déduire la relation suivante entre $\frac{dv}{v}$, $\frac{dS}{S}$ et le nombre de Mach en tout point s (S est l'aire de la section) :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{ds} = \frac{1}{S} \frac{dS}{ds} \left(\frac{1}{Ma^2 - 1} \right)$$


Rappel : $p = \rho g R T$, $c = \sqrt{\gamma g R T}$ = vitesse du son. Le fluide est de l'air dont le débit massique est $Q \text{ kg/s}$. La pression et la température dans la section 1 sont $p_1 \text{ N/m}^2$ et $T_1 \text{ °C}$. On a $\frac{dS}{ds} = \frac{S_2 - S_1}{L}$ (diminution linéaire de section sur la longueur L). Déterminer la pression, la masse volumique et la température dans la section 2.

$\Delta N: Q = 3 \text{ kg/s} \quad p_1 = 100 \text{ kN/m}^2 \quad T_1 = 10^\circ\text{C} \quad S_1 = 1 \text{ m}^2 \quad S_2 = 0,6 \text{ m}^2$
 $\gamma = 1,4 \quad R = 29,2 \text{ m/kg} \quad L = 10 \text{ cm.}$

$\text{1st: } Q = \rho v S = \text{cte} \quad \text{2nd}$

$$1) \int \frac{1}{S} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{S} \frac{dS}{ds} + \frac{1}{v} \frac{dv}{ds} = 0$$

$$2) \frac{p}{\rho} = \text{cte} \rightarrow \frac{1}{S} \frac{dp}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

$$3) \text{Bernoulli: } \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{1}{S} \frac{dp}{ds} - \frac{p}{S^2} \frac{dS}{ds} \right) = 0$$

on déduit $v \frac{dv}{ds} + \frac{1}{S} \frac{dp}{ds} = 0 \quad \text{et}$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{ds} (1 - Ma^2) + \frac{1}{S} \frac{dS}{ds} = 0 \quad \text{qfd}$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dv}{v} = \frac{1}{S} \frac{dS}{S} \left(\frac{1}{Ma^2 - 1} \right)$$

$$p_1 = \frac{p_1}{\rho_1 R T_1} \rightarrow v_1 = \frac{Q}{\rho_1 S_1} \quad p_1, v_1: \text{connus}$$

$$c_1 = \sqrt{\gamma g R T_1} \quad \text{connu} \rightarrow Ma_1 = \frac{v_1}{c_1} \quad \text{connu} \rightarrow \Delta v \text{ connu.}$$

$$v_2 - v_1 = \Delta v \quad v_2 = \frac{Q}{\rho_2 S_2} \rightarrow \rho_2 = \frac{Q}{v_2 S_2} \quad \text{connu.}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{g R} \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \right) \quad \text{et } p_2 = \rho_2 g R T_2$$

4e: à faire

— N —

Mécanique des Milieux Continus

I Ondes de Riemann

On considère l'écoulement unidimensionnel suivant Ox d'un fluide parfait compressible. Soit $\vec{v} = (u, 0, 0)$ la vitesse du fluide, ρ sa densité et p la pression. Les grandeurs u , ρ et p ne dépendent ici que de x et t .

Les équations d'Euler et de continuité s'écrivent

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

La relation d'état du fluide est notée $p = p(\rho)$.

1. Les solutions de Riemann de ces équations non linéaires sont telles que $u = u(\rho)$ où $\rho = \rho(x, t)$. Montrer que de telles solutions existent si la condition suivante est vérifiée

$$\left(\frac{du}{d\rho} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{dp}{d\rho}$$

2. Dédurre de (2) que les valeurs constantes de la densité se propagent suivant deux vitesses possibles $c_{\pm} = u \pm a$ où on a noté

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2(\rho)$$

3. Donner l'expression de $c_{\pm}$ en fonction de ρ dans le cas d'un écoulement adiabatique $p/\rho^\gamma = \text{cte}$. En déduire que $|c_{\pm}|$ croît (resp. décroît) quand ρ croît (resp. décroît). Montrer alors que si la densité ρ à un instant donné a la forme suivante (fig 1), alors à un instant ultérieur, la densité doit présenter un saut de compression (fig 2).

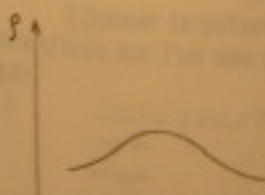


fig 1

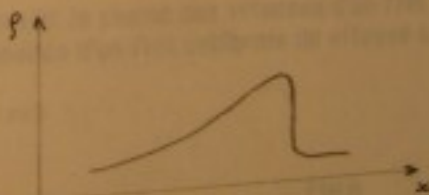


fig 2

II Tuyère convergente - divergente

Soit le dispositif représenté (fig 3), de symétrie cylindrique, parcouru par de l'air, qui permet d'obtenir dans la section 3 des vitesses supersoniques si la pression $p_4 < p_3$. On note p_i, T_i, ρ_i, V_i la pression, la température, la densité, et la vitesse de l'air dans la section i , dans une décharge isentropique, (dans ce cas $p/\rho^k = \text{cte}$), A_i est la surface de cette section, p_+ est la pression ambiante.

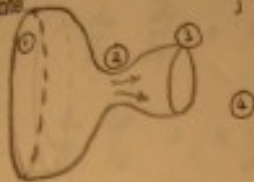


Fig 3

1. Exprimer le nombre de Mach Ma dans la section 2 en fonction de p_1/p_2 . On admettra $V_1 \ll V_2$ ($A_1 \gg A_2$).

$$k = c_p/c_v$$

2. La vitesse du son étant atteinte dans la section 2, donner l'expression du débit massique dans cette section en fonction de A_2, p_1, ρ_1 et k (1.4). On rappelle que la vitesse du son est $V_s = \sqrt{k p / \rho}$ où $R = 29.2 \text{ m}^2/\text{kg} \cdot \text{K}$.

3. Quelle est l'équation vérifiée par la densité dans la section 3 permettant d'en déduire les caractéristiques du flot à la sortie de la tuyère.

$$\text{A.N: } p_1 = 800 \text{ kN/m}^2, T_1 = 45^\circ \text{C}$$

$$R_2 = 0.1 \text{ m}, R_3 = 0.3 \text{ m} \quad (R_2, R_3 \text{ rayons des sections } A_2, A_3)$$

III Méthode des images.

Les flots incompressibles non visqueux et irrotationnels à 2 dimensions sont décrits par un potentiel complexe $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ où $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$ vérifiant certaines conditions aux limites.

1. Pour déterminer le potentiel d'une source située à égale distance de 2 plans (fig 4) distants de d , on juxtapose un ensemble infini de sources équidistantes de d (fig 5). Pourquoi? Sachant que $\frac{1}{\pi} (z + ind) = \frac{\sinh(\pi z/d)}{d}$, donner ce potentiel complexe.



Fig 4



Fig 5

2. Donner le potentiel complexe et le champ des vitesses d'un flot provenant d'une source située sur l'un des plans en présence d'un flot uniforme de vitesse uniforme U_0 (fig 6).

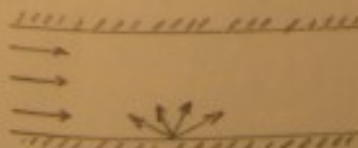


Fig 6

1. de (1.1), on tire

$$(1.1) \quad \frac{du}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{du}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$(1.1') \quad \frac{du}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} + \left(u \frac{du}{dp} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

de (1.2), on a :

$$(1.2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + p \frac{du}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(1.2') \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \left(u + p \frac{du}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

des deux équations (1.2') et (1.1') on tire la relation

$$\frac{du}{dp} \left(u + p \frac{du}{dp} \right) = u \frac{du}{dp} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dp}$$

$$p \left(\frac{du}{dp} \right)^2 = \frac{1}{p} \frac{dp}{dp} \quad \text{D'ou la relation (1.3)}$$

2. de (1.2) et (1.3), on a, pour les solutions $\frac{du}{dp} = \pm \frac{1}{p} \sqrt{\frac{dp}{dp}}$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Soit on $\frac{dp}{dt} = u \pm a$ (idem pour $u-a$), $a = 0$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

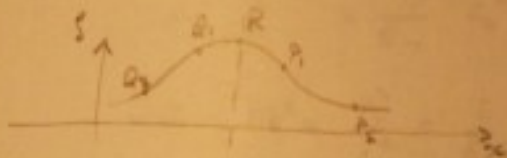
$\frac{1}{r} = 1 \Rightarrow r = B s^{\gamma} \quad \frac{dr}{ds} = B \gamma s^{\gamma-1} = a^2(s)$

Donc $s^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = B \gamma s^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = B \gamma s^{\gamma-3}$

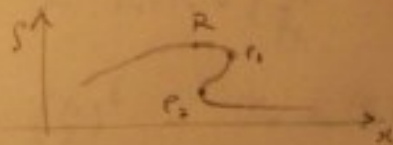
$\frac{du}{ds} = \pm \sqrt{B \gamma} s^{\frac{\gamma-3}{2}} \quad u(s) = \pm \sqrt{B \gamma} \frac{s^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\frac{\gamma-1}{2}} + \text{cte}$

+ $C_2 = \pm \sqrt{B \gamma} \frac{s^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\frac{\gamma-1}{2}} \pm \sqrt{B \gamma} s^{\frac{\gamma-1}{2}} + \text{cte}$ On considère les solutions avec signe +

$C_{\pm}(s) = \pm \sqrt{B \gamma} \left[1 + \frac{s}{\gamma-1} \right] s^{\frac{\gamma-1}{2}} + \text{cte}$. On considère la solution avec signe + la limite.



Comme $s(P_2) < s(P_1)$ le point P_2 se propage avec une vitesse plus grande que P_1 . De même $s(Q_1) > s(Q_2)$ le point Q_2 se propage avec une vitesse plus grande que Q_1 . Donc la partie gauche de R va s'étaler alors que celle de droite va former une pente plus grande. Il se pourrait alors que $x(P_2) < x(P_1)$



Ceci rendant la solution $s(x,t)$ à cet instant non unique. Ce type de solutions n'est pas admissible physiquement. D'où le choc présente.

- Eq 3 -

5) a) b) a)

$$Ma^2 = \frac{V_2^2}{c_2^2} = \frac{V_2^2}{\gamma R T_2}$$

also same part

$$\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{g}{k-1} \left(\frac{p_2}{g p_1} \right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad \text{also } \frac{p_2}{p_1} = \gamma R T_2$$

$$V_1 \& V_2 \rightarrow \frac{V_2^2}{2g} = \frac{g}{k-1} \left(\frac{p_2}{g p_1} \right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{k-1} c_2^2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$\text{also } Ma^2 = \frac{V_2^2}{c_2^2} = \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$2) \& Ma = 1 \quad \text{also } 1 + \frac{k-1}{2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (*)$$

$$\text{Data part, from calculator } G = p_1 A_1 V_1 = p_2 A_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\text{also } A_2 = c_2 = \sqrt{\frac{k p_2}{\rho_2}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow G = A_2 (k p_2 \rho_2)^{\frac{1}{2}} = A \left[k p_1 \frac{p_2}{p_1} \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= A_2 \left[\frac{k}{\rho_1} p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec *

$$G = A_2 \left[\frac{k}{\rho_1 p_1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Rappel: 1 bar = 10^5 N/m^2
 $= 10^5 \text{ Pa}$

$p_1 = 800 \text{ kN/m}^2$

$T_2 = 318^\circ \text{K}$

$p_2 = 8 \text{ bar}$

$A_2 = 3.14 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

$A_3 = 0.28 \text{ m}^2$

Calcul de $\rho_1 = \frac{p_1}{gRT_1} = \frac{800 \cdot 10^3}{9.81 \cdot 29.2 \cdot 318} = 8.78 \text{ kg/m}^3$

$G = 56.29 \text{ kg/s}$

$\left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow \frac{p_2}{800 \cdot 10^3} = \left(\frac{\rho_2}{8.78} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} \rightarrow p_2 = 38.22 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad (1)$

Enfin

$\frac{V_2^2}{2} = \left(\frac{p_2}{\rho_2} \right) \frac{1}{\gamma} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right) \rightarrow V_2^2 = 42.46 \cdot 10^4 \left(1 - 0.02 \cdot p_2^{0.28} \right)$
 $= \frac{41.87 \cdot 10^4}{\rho_2^2} \quad (2)$

De (1) et (2), on tire ρ_2 et p_2 avec (2), on tire V_2 avec p_2 et p_1

et tire T_2 on a donc

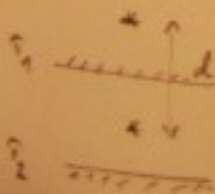
$42.46 \cdot 10^4 \left(1 - 0.02 \cdot (38.22 \cdot 10^3)^{0.28} \right) \rho_2^{0.28} = \frac{41.87 \cdot 10^4}{\rho_2^2} \rightarrow \rho_2$

1) Il s'agit de réaliser chacun des 2 plans comme une équipotentielle

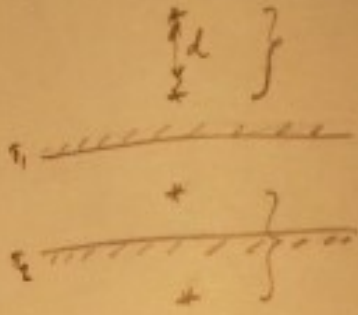
Par adjonction d'une source située dans le

$\frac{1}{2}$ plan supérieur, on réalise le plan τ_1 comme

équipotentielle mais τ_2 ne l'est pas



on ajoute donc une 3^e source dans le $\frac{1}{2}$ plan inférieur mais alors z_1 n'est plus équipotentielle (par raison de symétrie) on rajoute alors une source dans le $\frac{1}{2}$ plan supérieur, mais alors z_2 n'est plus équipotentielle. Le processus doit être répété un nombre infini de fois.

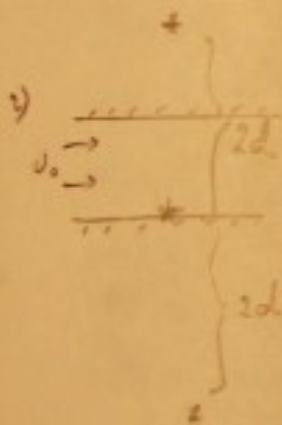


Le potentiel complexe pour une source placée à l'origine est

$$F(z) = +\frac{Q}{2\pi} \log z \quad \text{et pour une ensemble}$$

de sources équidistantes de d

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} +\frac{Q}{2\pi} \log(z + ikd) = +\frac{Q}{2\pi} \log \sinh\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$



Dans ce cas, on peut reprendre le processus précédent mais il faut alors placer la source équidistante de $2d$. On la même expression que précédemment avec $d \rightarrow 2d$

$$F_2(z) = +U_0 z + \frac{Q}{2\pi} \log \left(\sinh\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \right) \quad \text{et}$$

la vitesse est déduite de $+\frac{dF_2}{dz} = u - iv$

$$= U_0 + \frac{Q}{4d} \coth\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \quad \text{Donc } u \text{ et } v$$

~~~~~

Licence de Physique  
Mécanique des Milieux Continus

I Un fluide non visqueux, incompressible, en mouvement stationnaire, est placé dans un récipient cylindrique tournant autour d'un axe vertical  $oz$ , à la vitesse angulaire  $\Omega$  constante. On désigne par:

$v$  la composante radiale de la vitesse du fluide  $\vec{v}$   
 $v$  " " tangentielle " " "  
 $w$  " " longitudinale " " "

et  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_z$  les vecteurs unitaires dans le système de coordonnées cylindriques.

1: Exprimer  $(\vec{v} \cdot \vec{v})$  en fonction de  $v$ ,  $r$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ ,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ .  $v$  ne

dépend pas de  $\theta$ . Pourquoi? Rappel :  $\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$

2: Donner les 3 projections de l'équation d'Euler, les forces extérieures étant les forces de gravitation.

3: La surface libre du fluide étant à la pression atmosphérique  $p_a$ , déterminer la forme de cette surface.

4 La vitesse angulaire est à présent supposée de la forme  $\Omega = \Omega(r)$ . Donner l'expression de  $\Omega(r)$  dans le cas où le flot est potentiel c'est à dire  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ . On désigne par  $\Omega_0$  la valeur de la vitesse angulaire pour  $r=a$ ,  $a$  constante donnée. Donner l'expression de la forme de la surface libre du fluide dans ce cas.

II Formule de Stokes : Il s'agit de déterminer la force exercée par un fluide visqueux sur une sphère. Une sphère de rayon  $R$  est disposée dans le flot stationnaire d'un fluide de viscosité  $\mu$ , incompressible, de densité  $\rho$ . Elle est fixe. La vitesse du flot, si on se place suffisamment loin de la sphère, est horizontale (axe  $ox$ ) et a pour valeur  $\vec{v}_0$ .

Le nombre de Reynolds  $Re = \frac{|\vec{v}_0| R}{\nu}$  ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ) est supposé très inférieur à 1; on peut alors négliger le terme convectif devant le terme de viscosité dans l'équation de Navier Stokes.

1: Le champ de vitesses doit vérifier les équations

$$(E1) \quad \vec{\nabla} p = \mu \Delta \vec{v}$$

$$(E2) \quad \text{div}(\vec{v}) = 0$$

alors que les conditions aux limites sont

$$(E3) \quad \vec{v}|_{r=R} = 0, \quad v_x|_{r \rightarrow \infty} = v_0, \quad v_y|_{r \rightarrow \infty} = v_z|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Pourquoi?

2: La solution du système (E1,E2) est recherchée sous la forme

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\alpha} \quad \text{où} \quad \vec{\nabla} \phi|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}_0. \text{ Montrer que } \phi, \text{ de la forme } \phi = v_0 x +$$

$$C_1 \frac{\partial r}{\partial x} + C_2 \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont deux constantes, vérifie une telle}$$

condition. Calculer  $\Delta(r)$  et  $\Delta(r^{-1})$ . Dédire de (E2), l'équation vérifiée par  $\phi$ . Quelle est alors une expression possible pour  $\vec{\alpha}$  en fonction de  $C_1$ ,  $r$  et  $x$ ? Donner  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de  $v_0$  et  $R$  pour vérifier (E3).

3: De (E1), déduire la pression  $p$  dans le fluide en fonction de  $\mu$ ,  $v_0$ ,  $R$ ,  $x$  et  $r$ .

4: Calculer la force exercée par le flot sur la sphère en fonction de  $\mu$ ,  $v_0$  et  $R$ . On rappelle que les composantes de cette force sur une surface

fixe, par unité de surface, sont  $f_i = p n_i - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) n_k \quad i=1,2,3$   
où  $(n_1, n_2, n_3)$  est le vecteur normal unitaire extérieur à cette surface.

$$\text{NB: } \Delta(r) = r^{-2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dr}{dr} \right).$$

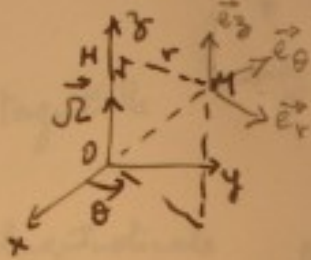
\*\*\*\*\*

Rep 1 :

1. Exprimer  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  en fonction de  $v, r, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OH} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{OH} + \vec{HH}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{HH}$$



$$= \Omega \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r = \Omega r \vec{e}_\theta = v_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{avec } v_\theta = \Omega r. \quad v_\theta \equiv v$$

$$\text{Donc, comme } \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_\theta \vec{e}_\theta = \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = (0, v_\theta, 0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta \right) \vec{e}_\theta = \frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r$$

Fluide incompressible des  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \theta} = 0$

Donc

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r$$

## 2. Euler stationnaire

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{f}$$

$\downarrow$   
0

$$\vec{f} = -\nabla u$$

$$u = g z$$

radiale  $-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$  (1)

tangentielle  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$  (2)

longitudinale  $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$  (3)

3. (2)  $\rightarrow p = p(r, z)$

(3)  $\rightarrow p = -\rho g z + h(r)$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dh(r)}{dr} = -\frac{1}{r} (\Omega^2 r^2) = -\Omega^2 r$$

$$\Rightarrow h(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2} + c_1$$

Donc  $p = -\rho g z + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + c_1$



$z=0, r=0 \rightarrow p = p_0$

Donc

$$p = -\rho g z + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + p_0$$

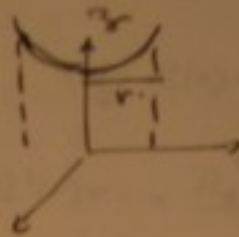
$p = p_a \rightarrow z = z(r)$

$$p_a - p_0 = -\rho g z + \frac{\Omega^2 r^2}{2}$$

$$gg = p_0 - p_m + \frac{\rho^2 v^2}{2}$$

$$g = \frac{p_0 - p_m}{\rho g} + \frac{\rho^2 v^2}{2g}$$

Refil parabolique.



4.  $\Omega = \Omega(r)$ . flot potentiel

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{\Omega}(r) \wedge \vec{e}_\theta = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} (\Omega x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (\Omega y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\Omega x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Omega y) \end{vmatrix} \quad \text{car } \Omega = \Omega(r)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{car } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \omega = \frac{\partial}{\partial x} (\Omega x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Omega y) &= 2\Omega + x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ &= 2\Omega + x \Omega'(r) \frac{x}{r} + y \Omega'(r) \frac{y}{r} \\ &= 2\Omega + \Omega' r \end{aligned}$$

flot  
libre

$\omega = 0 \rightarrow$

$$r \Omega' = -2\Omega \rightarrow \frac{\Omega'}{\Omega} = -\frac{2}{r}$$

$$\log \frac{\Omega}{\Omega_0} = \log \frac{1}{r^2}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{\Omega_0 a^2}{r^2}} \quad \Omega_0 = \Omega(r=a)$$

forme de la surface libre

et fait intégrer (1) de la 2<sup>e</sup> question :  $v_{\theta} = \Omega(r)r$ .

$$\begin{aligned} \frac{v_{\theta}^2}{r} &= + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \Omega^2(r) \frac{r^2}{r} = \Omega^2(r)r = \frac{\Omega_0^2 a^4}{r^4} + \\ &= \frac{\Omega_0^2 a^4}{r^3} \end{aligned}$$

$$p = - \int \frac{\Omega_0^2 a^4}{2r^3} + h(z)$$

$$(3) \rightarrow - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \quad \rightarrow - \frac{dh}{dz} = \rho g \quad h(z) = - \rho g z + c$$

Donc

$$p = - \rho g z + \frac{\rho \Omega_0^2 a^4}{2r^2} + c$$

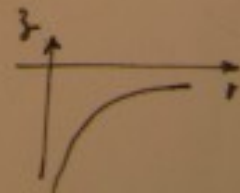
$$z=0 \quad r=\infty \quad p=p_0$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{\rho \Omega_0^2 a^4}{2r^2}$$

forme de la surface libre.  $p = p_a$

$$\rho g z = (p_0 - p_a) - \frac{\rho \Omega_0^2 a^4}{2r^2}$$

$$z = \frac{p_0 - p_a}{\rho g} - \frac{\rho \Omega_0^2 a^4}{2r^2 \rho g}$$



# MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

## I. Ondes gravitationnelles de surface d'un fluide.

Les équations d'Euler linéarisées d'un fluide incompressible non visqueux sont :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} = 0 \quad (1) \quad \text{div } \vec{V} = 0 \quad (2)$$

$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$  est le champ de vitesse,  $\rho_0$  est la densité (constante) et  $p$  la pression du fluide. Un fluide repose sur une surface plane  $z = -h$  et présente une surface libre qui, à l'équilibre, est le plan  $z = 0$ . Une perturbation de cette surface est notée  $\zeta(x, y, t)$  (voir figure 1 pour une représentation dans le plan  $y = 0$ ).

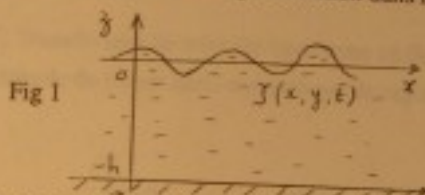


Fig 1

La pression en  $z = 0$  qui en résulte est  $p|_{z=0} = \rho_0 g \zeta$  (3) (si on ne tient pas compte des effets de tension de surface).

On notera  $\vec{V} = (u, v, w)$ ,  $\vec{V}_H = (u, v)$ ,  $\vec{V}_H$  étant porté par le plan  $xoy$  et  $w$  étant la composante verticale. On a  $w|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ . D'autre part, on définit :

$$\vec{\nabla}_+ = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Delta_+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

1) De (1) et (2), déduire l'équation pour  $w$  :  $\frac{\partial}{\partial t} \Delta_+ w = 0$  (4)

où  $\Delta = \Delta_+ + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . De (3), montrer que  $\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - g \Delta_+ w \right\}_{z=0} = 0$  (5)

2) On cherche les solutions de (4) sous la forme d'ondes planes se propageant dans le plan  $z = 0$ , avec le vecteur d'onde  $\vec{k}$  :

$$w(x, y, z, t) = \phi(z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega t)}$$

où  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ ,  $\vec{r} = (x, y)$ . Donner l'expression de  $\phi(z)$  satisfaisant (5) et la condition  $w(x, y, -h) = 0$  (fond rigide). Quelle est la relation  $\Omega = \Omega(k)$  pour que de telles ondes existent ?

3) Donner l'expression de la pression dans le fluide en fonction de  $\vec{k}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\rho_0$ ,  $\Omega$ ,  $h$ ,  $z$  et  $t$ .

4) Cas particuliers :

a) **Faible profondeur.** Soit  $h$  tel que  $kh \ll 1$ . Quelle est la vitesse de phase des ondes de surface ? Montrer que  $|\vec{V}_H| \gg w$ .

b) **Grande profondeur.** Soit  $h$  tel que  $kh \gg 1$ . Jusqu'à quelle profondeur les fluctuations de la surface se manifestent-elles ?

### III. Flot sur un obstacle.

Sur la figure 2 sont représentés en coupe deux plans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  faisant un angle  $\theta$  surmontés sur leur intersection  $\Delta$  d'un obstacle  $\Gamma$  de la forme d'un secteur de cercle de rayon  $R_1$ .

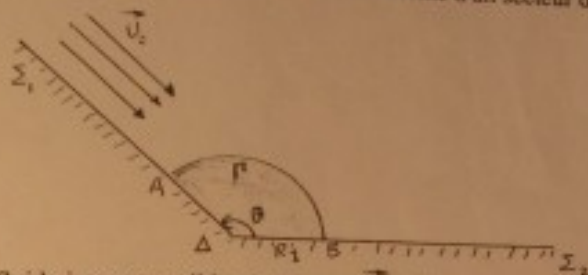


Fig 2

Un flot de fluide incompressible, de vitesse  $\vec{U}_0$  (à une distance suffisamment grande de  $\Gamma$ ) dirigée parallèlement à  $\Sigma_2$  et perpendiculairement à  $\Delta$ , est en présence de  $\Gamma$ . Il s'agit de déterminer le champ de vitesses en tout point du plan de la figure (le système est invariant par translation le long de  $\Delta$ ).

1) Transformer de manière conforme ce flot en un flot se propageant horizontalement vers un obstacle de forme demi-cylindrique de rayon  $R_2$ .

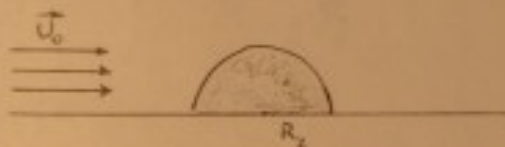


Fig. 3

2) En déduire le potentiel complexe des vitesses dans le cas de la figure 2 et la vitesse radiale en tout point. Exprimer  $R_2$  en fonction de  $R_1$  (on utilisera le fait que le fluide est au repos en  $A$ ).

## 2 Onde gravitationnelles de surface d'un fluide

$(X_1 \rightarrow X) \quad X_0(\vec{x}, p, \rho)$

le fluide est un visqueux <sup>incompressible</sup>  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  et  $\rho$  est constant d'ailleurs on a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g \vec{e}_z$$

$$\underbrace{(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t})}_{\text{onde}} + \underbrace{\rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{onde}} = \underbrace{-\rho_0 \nabla p}_{\text{onde}} - \underbrace{\rho_0 g \vec{e}_z}_{\text{équilibre}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

linéarisation autour de  $\vec{v}_0 = 0$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$  (équilibre)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \quad \text{équation (1)}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p_1}{\rho_0} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1(x) + \vec{v}_1(y)$$

$$a) \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0}$$

$$b) \quad \frac{\partial W_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0$$

$$c) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0$$

$$\vec{V} = (u, v, w)$$

$$\vec{V}_H = (u, v)$$

div (u) = 0

$$a) \Rightarrow \operatorname{div} \left( -\frac{\vec{v}_0}{\rho_0} \right) = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

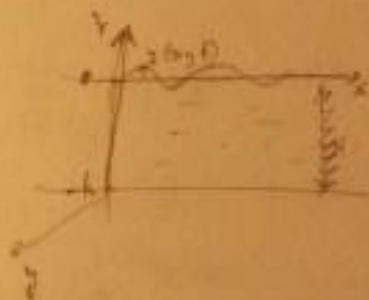
$$\Delta p = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial z}$$

$$b) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow \Delta p = 0 \quad \text{Laplace pour } p$$

$$c) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \Delta p = 0$$

En plus simplement  
le div  $\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0}$

car  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$   $\Rightarrow$   
 $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \Delta p = 0$



$$p|_{z=0} = p_0$$

condition à la surface libre  $z=0$  pour  $w$ .  
pression faible pression pour  $w$   
à la pression atmosphérique  
(car  $z=0$ ) non 96 ]

- 3 -

edit

$$w|_{z=0} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\Delta_+ \psi = g_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}$$

$$\Delta_+ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} = g_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \Big|_{z=0} = \Delta_+ \left( g_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} = \Delta_+ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Big|_{z=0}$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - g_0 \Delta_+ w \right) \Big|_{z=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w = 0$$

$$w|_{z=h} = 0$$

2)

On cherche une fonction harmonique

$$w(x, y, z, t) = \phi(z) e^{i(kx + \omega t)}$$

$$k^2 = (k_x^2 + k_y^2) \quad \omega = \omega(t) \quad \text{et } \omega = \Omega$$

$$\Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \phi(z) e^{i(kx + \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) = -i\Omega \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \phi(z) e^{i(kx + \omega t)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k^2 \phi = 0$$

$$\Delta w = -k^2 \phi(z) e^{i(kx + \omega t)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} e^{i(kx + \omega t)} \right) (kz)$$

$$\left( -\Omega^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} + g k^2 \phi \right) \Big|_{z=0} = 0$$

$$w|_{z=h} = 0 \Rightarrow \phi(h) = 0$$

$$\phi(z) = A \sinh(kz) + B \cosh(kz)$$

$$\phi(h) = -A \sinh(kh) + B \cosh(kh) = 0$$

$$\text{Nous} \begin{cases} -\Omega^2 (A \cosh(kz) - B \sinh(kz)) + g k^2 (A \sinh(kz) + B \cosh(kz)) \Big|_{z=0} = 0 \\ -\Omega^2 (A) + g k^2 B = 0 \\ A = \frac{g k^2}{\Omega^2} B \end{cases}$$

$$A \phi(kh) = B \phi(kh)$$

$$\phi(z) = A \phi(z_2) + \frac{A \phi(kh)}{dh(kh)} dh(z_2)$$

$$= \frac{A}{dh(kh)} [ \phi(z_2) dh(kh) + \phi(kh) dh(z_2) ]$$

$$\phi(z) = b \phi(z+kh)$$

$$b = \frac{A}{dh(kh)}$$

$$-x^2 \phi(z+kh) + g \phi(z+kh) \Big|_{z=0} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = g \phi(kh)$$

pour  $z=0$

relation de dispersion ( $\omega = \omega(k)$ )  
de kille onde.

Dispersion  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega \Big|_{z=0} = -i\Omega \zeta = b \phi(kh) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega t)}$

$$\zeta = -\frac{b}{i\Omega} \phi(kh) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega t)}$$

Précisons

$$\Delta p = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-i\omega p = \rho_0 (-i\omega) \int_0^h dz \, b(z+h) e^{i(kz - \omega t)}$$

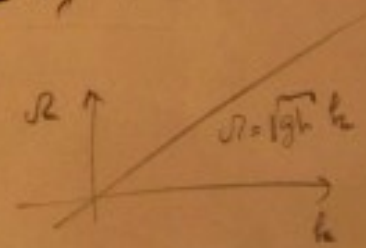
$$p = \frac{\rho_0 i\omega b}{k} \int_0^h dz \, b(z+h) e^{i(kz - \omega t)}$$

cas particulier : faible profondeur  $kh \ll 1$

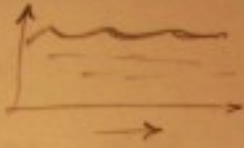
$$b(z+h) \approx b$$

$$\omega^2 = gk \quad \omega = \sqrt{gk} \quad R = \sqrt{gk} \, b$$

relation de dispersion  $\omega_k = \sqrt{gk}$



-7-



limites que  $|\vec{V}_H| \gg w$

Por valores  $\vec{V}_H$ :  $\frac{\partial \vec{V}_H}{\partial t} = -\frac{\vec{V}_H \cdot \nabla}{\rho_0}$

$$-\Omega \vec{V}_H = -\frac{(i\vec{k})}{\rho_0} \int \frac{\rho}{k} b \, dk \, h(z+h) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega t)}$$

$$\left\{ \vec{V}_H = + i b \frac{k}{k} \, dk \, h(z+h) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega t)} \right.$$

$$\left. w = b \, dk \, h(z+h) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega t)} \right.$$

$$|\vec{V}_H| \sim b$$

$$|w| \sim b \frac{k}{k} h \left(1 + \frac{z}{h}\right)$$

$$|w| \ll |\vec{V}_H|$$

$$b k h$$

grande profondeur

-8-

$kh \gg 1$

$$R(kh) = \frac{d\zeta/dk}{d\zeta/dk} = \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{e^{kh} - e^{-kh}} \approx \frac{e^{kh}}{e^{kh}} = 1$$

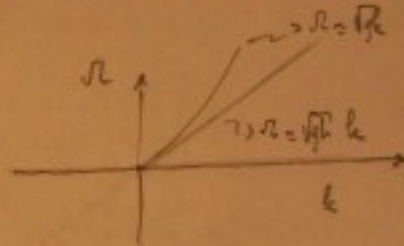
$$\Omega^2 \approx gk$$

$$\Omega \approx \sqrt{gk}$$

(ne dépend pas de  $h$ )

$$v_g = \frac{d\Omega}{dk} = \sqrt{g} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v_{ph} = \frac{\Omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = 2v_g$$



Les vagues sont-elles plus profondes les fluctuations de la surface se manifestent-elles ?

$$w = b \sin(ky + \Omega t) e^{i(\Omega t - \Omega t)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

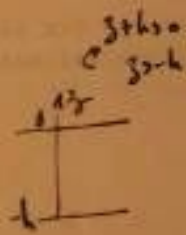
-9-



$$W = \frac{1}{2} (e^{kz+it} - e^{-(kz+it)}) e^{i\phi}$$

$\begin{matrix} \nearrow & \searrow \\ z & z-h \end{matrix}$

$\approx \frac{1}{2} (kz+it) \rightarrow 0 \text{ } \nearrow (z \rightarrow 0)$



Reflexion probabilities

$$\delta = \frac{1}{k} \propto \hbar$$

$$k\hbar \gg 1 \quad \hbar \gg \frac{1}{k} \propto \hbar$$

# MESURE DU MODULE D'ELASTICITE COMPLEXE

De l'observation d'un barreau-éprouvette excité à l'une de ses fréquences de résonance, on mesure le module et la phase de la grandeur  $E^*$  liant comme en élasticité la déformation à la contrainte.

On pose  $E^* = E_0 e^{i\delta}$  ou  $E_1 + iE_2$

$E_0$ : le module d'élasticité du matériau

$\delta$ : l'angle de perte lié à l'amortissement interne

Si l'on fait vibrer en flexion une éprouvette de longueur  $l$ , parallèle à  $Ox$ ; de largeur  $b$ , parallèle à  $Oz$ ; d'épaisseur  $h$ , parallèle à  $Oy$ ; de masse volumique  $\rho$ . On note  $y(x,t) = y(x)e^{i\omega t}$  le déplacement transversal du barreau, au point d'abscisse  $x$ .

## Rappels théoriques.

- 1°) Déterminer l'équation des vibrations transversales du barreau encastré à l'extrémité  $x=0$ ; libre à l'autre,  $x=l$ .
- 2°) Donner la forme de la solution générale de cette équation.

$$\text{On pose } \alpha^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$$

$\mu$  est la masse linéique.

$I$  est le moment d'inertie transversal du barreau.

$\omega$  est la pulsation.

- 3°) Donner l'expression des conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=l$ .
- 4°) Donner l'équation aux valeurs propres et commenter les résultats.

Les trois premières solutions sont:

|              |                                 |
|--------------|---------------------------------|
| pour $n = 1$ | on a $\alpha_1 l \approx 1.875$ |
| pour $n = 2$ | on a $\alpha_2 l \approx 4.694$ |
| pour $n = 3$ | on a $\alpha_3 l \approx 7.855$ |

## 1°) Détermination de $E_0$ :

Les fréquences de résonance sont données par :

$$f_n = \frac{\alpha_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

avec  $I = \frac{bh^3}{12}$  et  $\alpha_n = \frac{\beta_n}{l}$  on trouve :

$$E_0 = 48\pi^2 \rho \left( \frac{l^2 f_n}{\ln \frac{f_n}{f_1}} \right)^2$$

2°) Détermination de  $tg(\delta)$ :

A) Par la méthode de la bande passante.

Si l'on considère le modèle analogique de Voigt avec une masse  $m$ . Dans l'hypothèse du mouvement libre, donner l'équation différentielle qui régit le mouvement et sa solution, sous la forme  $y = Ae^{rt}$ . L'exposant  $r$  est complexe. On pose :

$\lambda = \frac{C}{2m}$  est le coefficient d'amortissement.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre.

$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$  : la pulsation de résonance du système amorti.

$\xi = \frac{C}{C_c}$  est le degré d'amortissement soit:  $C_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$

$C_c$  est l'amortissement critique.

On écrit pour le modèle de Voigt, que la contrainte est proportionnelle à la déformation; on trouve l'expression de  $tg(\delta)$ .

$$tg(\delta) = \frac{\omega C}{k} = \frac{\omega 2\xi}{\omega_0} \quad \text{soit à la résonance } tg(\delta) = 2\xi$$

Dans l'hypothèse où l'on exerce une force sinusoïdale  $F = F_0 \sin(\omega t)$ . Donner l'expression du déplacement suivant l'axe  $y$ . On fera apparaître

les termes  $(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})$  et  $2\xi \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Donner l'expression de  $y$  à la résonance. Exprimer  $\frac{y}{y_{res}}$  en fonction du

rapport des fréquences  $\frac{f}{f_0}$ . On a  $\omega = 2\pi f$  et  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

On pose  $f = f_0 + \delta f_0$ ,  $\delta f_0$  une petite variation de  $f$  autour de  $f_0$ .

On négligera les termes du second ordre ainsi que :

$$\frac{2\delta f_0}{f_0} \text{ devant } \left( \frac{\delta f_0}{f_0} \right)^2$$

On trouve :

$$\frac{y}{y_{res}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\delta f_0}{f_0} \right)^2}}$$

D'après la définition de la bande passante appliquée au rapport  $\frac{y}{y_{rés}}$ ,

on trouve  $\frac{\Delta f_0}{f_0} = \xi$ .

$$\text{On a donc } \operatorname{tg}(\xi) = \frac{2\xi f_0}{f_0}$$

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont les deux fréquences définissant la bande passante. En posant  $\Delta f = f_2 - f_1$ , on obtient:

$$\operatorname{tg}(\xi) = \frac{\Delta f}{f_0}$$

B) Par la méthode de la réverbération à la résonance.

La solution de l'équation qui régit le mouvement oscillant du système libre amorti est :

$$y = A e^{-\frac{Ct}{2m}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Soit } \Delta = \log \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{CT_0}{2m} = \lambda T_0 \quad \text{le décrément logarithmique.}$$

$T_0$  est la période liée à  $f_0$ .

Pour  $q$  périodes on a  $y_q = y_0 e^{-q\Delta}$ , comme  $\Delta = 2\pi\tau$  avec  $\tau = \frac{C}{2m\omega_0} = \frac{\lambda}{\omega_0}$

On trouve :

$$\operatorname{tg}(\xi) = 2\tau = \frac{\Delta}{\pi}$$

Si l'on mesure  $N(\text{dB})$  d'atténuation entre l'amplitude  $y_0$  et  $y_q$ .

$$\text{On a } N_{dB} = 20 \log \left( \frac{y_0}{y_q} \right) = 20 \log \left( e^{q\lambda T_0} \right)$$

$$\text{Soit } \Delta = \frac{N}{8.68q} = \frac{N}{8.68f_0 t} \quad \text{et } \operatorname{tg}(\xi) = \frac{N}{8.68\pi f_0 t}$$

On note  $D = \frac{N}{t}$  l'atténuation en dB par seconde, grandeur analogue à l'atténuation sonore dans une salle lorsque l'on arrête l'émission de la source acoustique.

$$\operatorname{tg}(\xi) = 0.0368 \frac{D}{f_0}$$

EXAMEN DE PHYSIQUE

FACULTE DES SCIENCES DE LUMINY

Mécanique des milieux continus

06.05.1988

- I. a) Définition du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$   
b) Représentation matricielle du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  et du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}$ .
- II. Etablir la loi contrainte déformation dite "loi de Hooke" pour un solide élastique, linéaire sous forme matricielle, tensorielle. On rappelle que  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$   
 $C_{ijkl}$  tenseur du 4<sup>e</sup> ordre.
- III. Après plusieurs hypothèses faisant intervenir la symétrie, l'isotropie d'un solide, le tenseur  $C_{ijkl}$  se réduit à 36 composantes fonction de deux constantes dites de Lamé  $\lambda, \mu$ . Etablir l'équation matricielle et tensorielle de la loi contrainte déformation pour un solide défini aussi.

Problème

Calculer le module de cisaillement  $\mu(t)$  pour un barreau viscoélastique qui obéit à la loi de Maxwell et dont le module de dilatation  $k$  est supposé constant sous un simple cisaillement. On rappelle que :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6K}$$

que devient alors  $\mu(t)$  pour  $E/K \ll 1$

$E$  module de Young

$\mu$  module de cisaillement

$K$  module de dilatation

$\nu$  coefficient de Poisson.

Examen de Physique -  
Faculté des Sciences de Luminy -  
Mécanique des milieux continus.  
6. 5 - 22.

I a) Définition du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$

b) Représentation matricielle du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  et du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}$ .

II Établir la loi contrainte déformation dite "loi de Hooke" pour un solide élastique, linéaire sous forme matricielle, tensorielle.

On rappelle que  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$ .

$C_{ijkl}$  tenseur du 4<sup>e</sup> ordre.

III Après plusieurs hypothèses faisant intervenir la symétrie, l'isotropie d'un solide, le tenseur  $C_{ijkl}$  se réduit à 36 composantes fonction de deux constantes dites de Lamé  $\lambda, \mu$ . Établir l'équation matricielle et tensorielle de la loi contrainte déformation pour un solide défini ainsi.

Problème

Calculer le module de cisaillement  $\mu(\tau)$  pour un barreau viscoélastique qui obéit à la loi de Maxwell et dont le module de dilatation  $K$  est supposé constant sous un simple cisaillement.

On rappelle que

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\text{et } \nu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6K}$$

On devrait alors  $\mu(\tau)$  pour  $E/K \ll 1$

# I Définition de l'axe des contraintes, et de la déformation.



Soit un tétraèdre dont trois des faces sont considérées par les plans de coordonnées et la 4<sup>e</sup> face  $A_1 A_2 A_3$ . Soit  $\vec{T}$  le vecteur de contrainte M pour la direction  $\vec{n}$ .

Si on désigne par  $n_1, n_2, n_3$  les valeurs unitaires des axes de coordonnées, on peut définir neuf scalaires  $\sigma_{ij}$  pour chaque  $T_i$  ( $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ ),  $T_2$  ( $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ )  $T_3$  ( $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ ) tel que

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = T_i q_i$$

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

On peut demander par la loi fondamentale de la mécanique.

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$T_1 = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} + n_3 \sigma_{13}$$

$$T_2 = n_1 \sigma_{21} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{23}$$

$$T_3 = n_1 \sigma_{31} + n_2 \sigma_{32} + n_3 \sigma_{33}$$

$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$\sigma_{ij}$  étant l'opérateur linéaire faisant passer de  $\vec{n}$  à  $\vec{T}$  est un tenseur de 2<sup>e</sup> ordre - Tenseur des contraintes.

## II Représentation matricielle du tenseur de déformation.

$$E_{ij} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}$$

On voit que pour un solide élastique, l'énergie de déformation peut s'écrire :

$$U_d = C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$$

$C_{ijkl}$  est un tenseur du 4<sup>e</sup> ordre il y a donc 81 composantes

|            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $C_{1111}$ | $C_{1112}$ | $C_{1113}$ | $C_{1121}$ | $C_{1122}$ | $C_{1123}$ | $C_{1131}$ | $C_{1132}$ | $C_{1133}$ |
| $C_{1211}$ | $C_{1212}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{1311}$ | $C_{1312}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{2111}$ | $C_{2112}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{2211}$ | $C_{2212}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{2311}$ | $C_{2312}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{3111}$ | $C_{3112}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{3211}$ | $C_{3212}$ |            |            |            |            |            |            |            |
| $C_{3311}$ | $C_{3312}$ |            |            |            |            |            |            |            |

qui après simplification (symétrie, isotropie) se réduit à 36 composantes et peut s'écrire :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \lambda$$

|                 |                  |                  |                  |        |        |        |                 |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|--------|--------|--------|-----------------|
| $\sigma_{11} =$ | $\lambda + 2\mu$ | $\lambda$        | $\lambda$        | 0      | 0      | 0      | $\epsilon_{11}$ |
| $\sigma_{22} =$ | $\lambda$        | $\lambda + 2\mu$ | $\lambda$        | 0      | 0      | 0      | $\epsilon_{22}$ |
| $\sigma_{33} =$ | 0                | 0                | $\lambda + 2\mu$ | 0      | 0      | 0      | $\epsilon_{33}$ |
| $\sigma_{12} =$ | 0                | 0                | 0                | $2\mu$ | 0      | 0      | $\epsilon_{12}$ |
| $\sigma_{23} =$ | 0                | 0                | 0                | 0      | $2\mu$ | 0      | $\epsilon_{23}$ |
| $\sigma_{31} =$ | 0                | 0                | 0                | 0      | 0      | $2\mu$ | $\epsilon_{31}$ |

$$\sigma_{11} = E_{11} (\lambda + 2\mu) + \lambda E_{22} + \lambda E_{33}$$

$$\sigma_{22} = \lambda E_{11} + (\lambda + 2\mu) E_{22} + \lambda E_{33}$$

$$\sigma_{33} = \lambda E_{11} + \lambda E_{22} + (\lambda + 2\mu) E_{33}$$

$$\tau_{12} = 2\mu E_{12}$$

$$\tau_{23} = 2\mu E_{23}$$

$$\tau_{31} = 2\mu E_{31}$$

$$\sigma_{11} = \lambda (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda ( \quad ) + 2\mu E_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda ( \quad ) + 2\mu E_{33}$$

$$\tau_{12} = 2\mu E_{12}$$

⋮

$$\sigma_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

$$\Theta = E_{11} + E_{22} + E_{33}$$

$$\mu = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$2\mu E_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} \Theta \delta_{ij}$$

Problème

En élasticité on peut écrire.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\text{avec } \nu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6K}$$

$\mu$  Module de cisaillement  
 $E$  Module d'Young.

$\nu$  coefficient de Poisson.

$K$  Module de dilatation

On calcule  $\mu$  en fonction de  $E$  et de  $K$ .

$$\mu = \frac{3E}{3 - 8/K}$$

en viscoélasticité le module de cisaillement devient

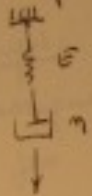
$$\mu^2 = \frac{3\epsilon}{9 - \frac{\epsilon}{\kappa}}$$

$\kappa$  constant.

$$\tilde{E} = p \cdot E(p)$$

$$\tilde{\mu} = p \mu(p)$$

four un modèle de Maxwell.



$$\eta/E = \delta$$

$$\tilde{E} = Q(p) = \frac{E \delta p}{\delta p + 1}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{3 E \delta p / \epsilon p + 1}{9 - \frac{E \delta p}{\kappa (1 + \epsilon p)}}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{3 E \delta p}{9 \kappa + 9 \delta p - E \delta p}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{3 E \delta p}{9 + 9 \delta p - \frac{E}{\kappa} \delta p}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{3 E \delta p}{9 + \left[ 9 \delta - \frac{E}{\kappa} \delta \right] p}$$

$$\mu(t) = \left[ \frac{3 E}{9 - \frac{E}{\kappa}} \right] e^{\frac{t}{\tau} (1 - E/9\kappa)}$$

et pour  $\mu(t) = E(t)/3$  pour  $E/\kappa \ll 1$

## Examen de Physique.

### V V Mécanique des milieux continus 5-5-87.

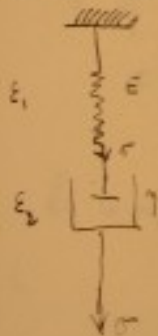
Sujet: Etablir les équations de constitution par la méthode classique (lois de la mécanique c.o.d de l'action et de réaction et par les transformations de Laplace des modèles mécaniques dit de "Maxwell", "Voigt", "Standard" -

## I Méthode Classique.

### A / Modèle de Maxwell

Un corps élastique peut être représenté analogiquement par un ressort; de même un dashpot (amortisseur), peut représenter le comportement d'un fluide visqueux.

Pour un modèle de Maxwell, l'amortisseur et le ressort sont en série. Pour une contrainte  $\sigma$  on a



$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\sigma = E \epsilon_1$$

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}_2$$

d'où

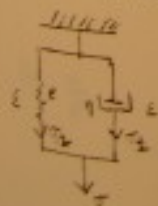
$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

d'où si  $\tau = \frac{\eta}{E}$  temps de relaxation

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} + \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}}$$

### B / Modèle de Voigt.

Le ressort et le dashpot sont en parallèles.



on a

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$$

$$\sigma_1 = E \epsilon$$

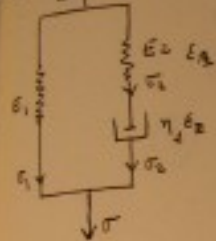
$$\sigma_2 = \eta \dot{\epsilon}$$

$$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon}$$

et si  $\tau = \frac{\eta}{E}$

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} = \epsilon + \tau \dot{\epsilon}}$$

Modele Standard.



Modele a 3 parametres un ressort  $E_1$  en // avec un ressort  $E_2$  lui même en série avec un dashpot.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\sigma_2 = \eta_2 \dot{\epsilon}_2$$

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_2$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\sigma}_2 / E_2$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E_2} [\dot{\sigma}_1 - E_1 \dot{\epsilon}_1] + \frac{1}{\eta_2} (\sigma_1 - E_1 \epsilon_1)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E_2} \dot{\sigma}_1 - \frac{E_1}{E_2} \dot{\epsilon}_1 + \frac{\sigma_1}{\eta_2} - \frac{E_1}{\eta_2} \epsilon_1$$

$$E_2 \dot{\epsilon} = \dot{\sigma}_1 - E_1 \dot{\epsilon}_1 + \frac{\sigma_1}{\eta_2} - \frac{E_1}{\eta_2} \epsilon_1$$

$$E_2 \dot{\epsilon} + E_1 \dot{\epsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_2} \epsilon_1 = \dot{\sigma}_1 + \frac{\sigma_1}{\eta_2}$$

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = E_2 \epsilon + (E_2 + E_1) \tau \dot{\epsilon}$$

## II Methode utilisant les transformations de Laplace.

Pour un ressort  $\tau_1 = \frac{1}{E}$

$E$  constant et pour le dashpot.

$\tau_2 = \frac{1}{\eta p}$  avec  $\eta$  constant.

I Model de Maxwell.

$$\tau(p) = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta p} = \frac{\eta p + E}{E \eta p}$$

La compliance opérationnelle sera.

$$\tau(p) = \frac{E + \eta p}{E \eta p}$$

$$\sigma(p) = \tau(p) \sigma(p)$$

$$\tau(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - \lambda_i}$$

$$A_1 = E \quad \lambda_1 = 0$$

$$A_2 = \eta \quad \lambda_2 = -\frac{E}{\eta}$$

$$\tau_0 = \frac{\eta}{E}$$

$$E \tau + \eta p \tau = E \tau_0$$

$$\frac{p}{E} + \tau = \tau_0$$

II. Model de Voigt.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}, \tau(p) = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{1/E \cdot \frac{1}{\eta p}}{1/E + \frac{1}{\eta p}} = \frac{1}{E + \eta p} = \frac{1/E}{1 + \tau_0 p}$$

or

$$\bar{E} = U(p) \bar{\sigma}$$

$$U(p) = \frac{\sum A_i p_i}{\sum B_i p_i} = \frac{1/E}{1 + \bar{\sigma} p} = \frac{1}{E + \bar{\sigma} p}$$

$$\begin{matrix} A_0 = 1/E & B_0 = 1 \\ A_1 = 0 & B_1 = \bar{\sigma} \end{matrix}$$

(4)

$$\frac{\sigma}{E} + = \epsilon + \bar{\sigma} \epsilon'$$

### III Modèle standard.

$$U(p) = \frac{U_1 U_2}{U_1 + U_2}$$

$$\text{or } U_1 = \frac{1 + \bar{\sigma} p}{E_2 \bar{\sigma} p} \quad U_2 = \frac{1}{E_1}$$

Maxwell.

$$U(p) = \frac{\frac{1 + \bar{\sigma} p}{(E_2 \bar{\sigma} p) E_1}}{\frac{1 + \bar{\sigma} p}{E_2 \bar{\sigma} p} + \frac{1}{E_1}} = \frac{\frac{1 + \bar{\sigma} p}{E_1 E_2 \bar{\sigma} p}}{\frac{E_1 (1 + \bar{\sigma} p) + E_2 \bar{\sigma} p}{E_1 E_2 \bar{\sigma} p}}$$

(4)

$$U(p) = \frac{1 + \bar{\sigma} p}{\bar{\sigma} p (E_1 + E_2) + E_1}$$

$$U(p) = \frac{\sum_{i=0}^n A_i p^i}{\sum_{i=0}^n B_i p^i} = \frac{1 + \bar{\sigma} p}{\bar{\sigma} p (E_1 + E_2) + E_1} \quad \begin{matrix} A_0 = 1 & B_0 = E \\ A_1 = \bar{\sigma} & B_1 = \bar{\sigma} (E_1 + E_2) \end{matrix}$$

d'où en identifiant

$$\sigma + \bar{\sigma} \sigma' = E_1 \epsilon + (E_2 + E_1) \bar{\sigma} \epsilon'$$

W. Bismuth.

## Mécanique des Milieux Continus

### 1: Flot de Couette

Déterminez le champ des vitesses du flot stationnaire d'un fluide visqueux (viscosité  $\mu$ ) entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  ; le tube intérieur se déplace suivant la génératrice du cylindre à la vitesse  $\vec{v}_0$  ; le tube extérieur est fixe ( les effets de gravitation sont négligés et le système est invariant par translation le long de la génératrice ). On cherchera les solutions sous la forme  $\vec{v} = (0, 0, v_z(r))$ .

Calculez les forces de friction exercées par le fluide sur chaque cylindre .

N.B:  $\vec{\Delta} \vec{v}$  admet pour composantes , en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} , \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} , \Delta v_z ) , \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial(rv_r)}{r \partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{tenseur des contraintes ici : } \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} ; \Delta f(r) = \frac{d}{r dr} \left( \frac{r df}{dr} \right)$$

1) Donnez le potentiel complexe d'un doublet de moment  $\mu$  faisant un angle  $\varphi$  avec l'axe horizontal  $ox$  en présence d'un flot de vitesse uniforme  $\vec{U}_0$  faisant le même angle  $\varphi$  avec  $ox$  .

2) Situez les points d'arrêt . Une équipotentielle particulière a une forme circulaire . Calculez son rayon  $\delta$  en fonction de  $\mu$  et du module de  $\vec{U}_0$  .

3) Exprimez le théorème de Blasius permettant de calculer les forces exercées par un flot irrotationnel bidimensionnel stationnaire sur un obstacle en fonction du potentiel complexe.

### III: Transformation hodographe

On considère un écoulement plan, stationnaire, irrotationnel d'un fluide incompressible, (les forces de gravitation sont négligées ici). Le potentiel complexe est  $f(z) = \Phi(x,y) + i\psi(x,y)$ ,  $z = x + iy$ , la vitesse complexe est  $w = \frac{df}{dz} = u - iv$ .

**Sillage de Helmholtz :** c'est le sillage qui se forme à l'arrière d'un solide en admettant, comme un modèle, que le fluide contenu dans le sillage est au repos par rapport au solide et que le sillage s'étend jusqu'à l'infini (voir figure 1). Le flot, à l'infini, pour  $y > 0$ , est uniforme et parallèle à l'axe  $Oy$  d'amplitude  $U$ . L'axe  $Oy$  est par raison de symétrie une ligne de courant particulière  $\psi = 0$ , avec point d'arrêt en  $O$ . Cette ligne se prolonge par les 2 segments  $OM$  et  $OM'$  puis quitte la plaque, tangentiellement à l'axe  $ox$ , suivant les courbes  $MN$  et  $M'N'$ . Le long de ces courbes, la pression est constante et égale à  $p_\infty$ , la valeur de la pression dans le flot uniforme incident.

1) Quel est le module de la vitesse le long de  $MN$  et  $M'N'$ ?

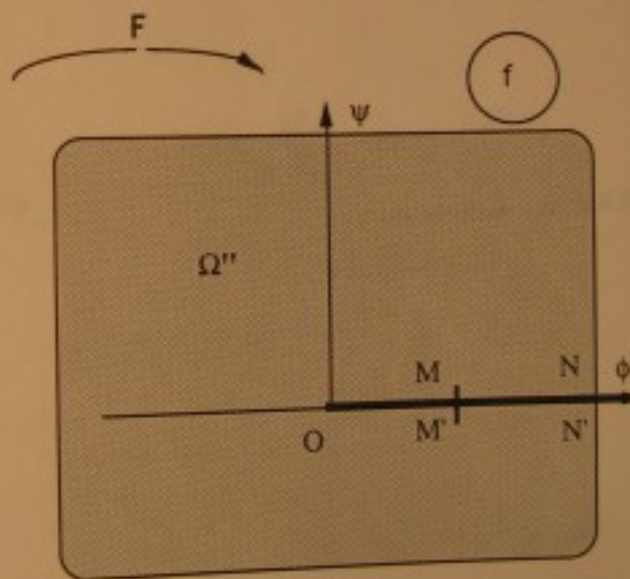
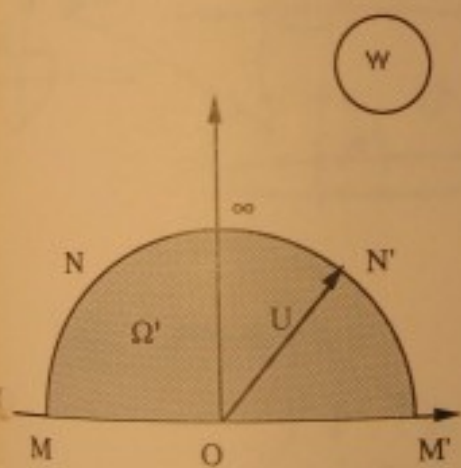
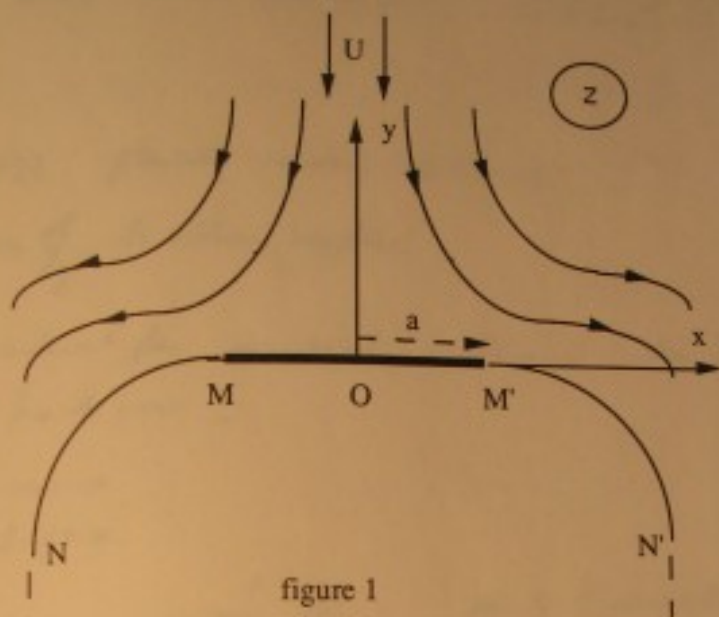
2) Le plan des  $w$  s'appelle plan de l'hodographe. Montrez que l'ensemble des vitesses possibles du flot se situe dans le demi disque  $\Omega'$  (voir figure 2).

3) A  $\Omega'$  est associé dans le plan  $f$  l'ensemble  $\Omega''$  qui est le plan muni du demi axe ( $\phi > 0, \psi = 0$ ) comme coupure (voir figure 3). Soit la

transformation  $f = \frac{4 \cdot A}{\left(\frac{w}{U} + \frac{U}{w}\right)^2} = F(w)$  du plan  $w$  dans le plan  $f$ , où  $A$  est une

constante à déterminer. On pose  $w = U \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2}\right)$ . Calculez  $z$  en fonction de  $\zeta$ . Pour

$\zeta = e \frac{\pi}{2}$ ,  $z = \varepsilon a$ ,  $\varepsilon = +1$  ou  $-1$ . Pourquoi? En déduire  $A$ . Comment s'obtient le flot?



# Transformation biographe - Sillages d'Helmholtz

Année 1989-90

(2) potentiel complexe (à trouver)

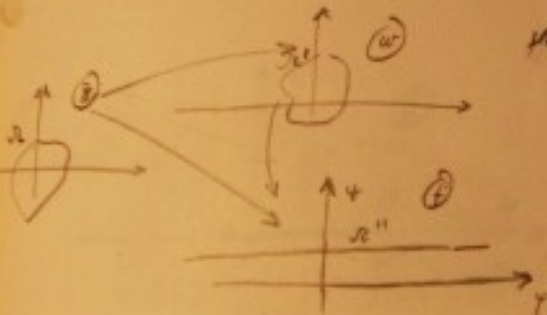
$w = \frac{df}{dz}$  la vitesse complexe

écoulement plan, permanent, irrotationnel, d'un fluide incompressible  
sans viscosité.

$w = u + iv$

$f = \phi + i\psi$

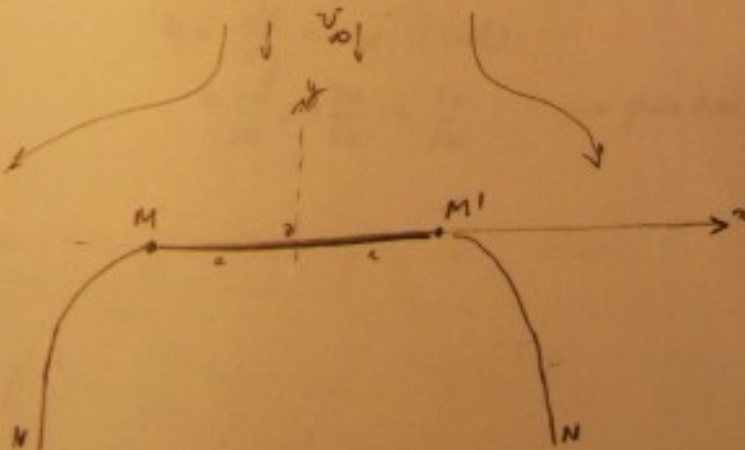
plan de l'hydrographie.



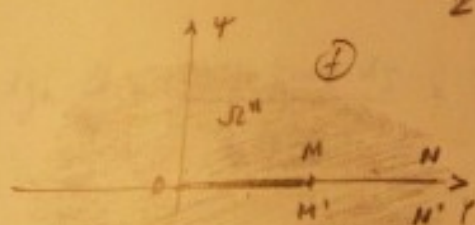
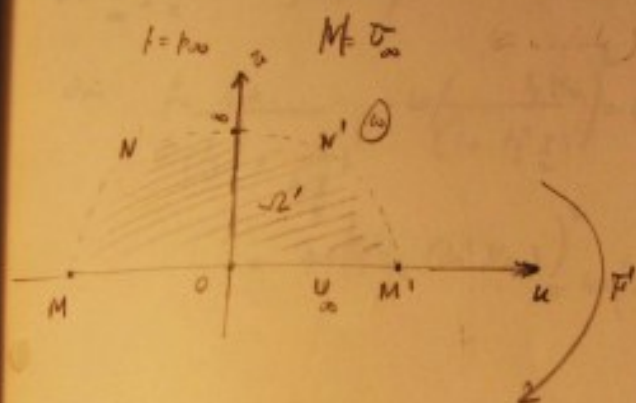
$$dz = \frac{df}{w(z)} \rightarrow z = F(f)$$

on a déduit la relation  
entre  $f$  et  $z$ .

## Sillages d'Helmholtz



Le lac jusqu'au village n'étend jusqu'à la fin



$$z = x \text{ iel}, \quad v = 0$$

$$x \in [-a, +a]$$

$$V = V_{\infty} \quad \text{gum}$$

MM, M'M'  $\rightarrow \frac{1}{2}$  inch

Enfin  $|V| \in U_\infty$  l'entier

$f \approx f_{\infty}$

$$3 \rightarrow 10$$

Una O

$$v \sim \frac{1}{4} c_0$$

$$10^3 = 1000 = 10^3$$

$$W = \frac{dL}{dz} \sim v_{\infty} \quad (\text{real})$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow \varphi \rightarrow +\infty$$

$$f = \frac{4A}{\left(\frac{w}{U_\infty} + \frac{U_\infty}{w}\right)^2} = F(w)$$

$$\begin{aligned} w=0 & \quad f=0 \\ w=U_\infty & \quad f=\frac{4A}{4}=A \text{ val.} \\ w=-U_\infty & \quad f=A \text{ val.} \\ w=-iU_\infty & \quad f \rightarrow \infty \\ & = -iV \end{aligned}$$

$$w = U_\infty \tanh \frac{z}{2} \quad z = \xi + i\eta$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f &= \frac{4A}{\left(\tanh \frac{z}{2} + \frac{1}{\tanh \frac{z}{2}}\right)^2} = \frac{4A}{\left(1 + \frac{1}{\tanh^2 \frac{z}{2}}\right)^2} = \frac{4A}{\left(1 + \frac{\cosh^2 \frac{z}{2}}{\sinh^2 \frac{z}{2}}\right)^2} \\ &= \frac{4A \left(\sinh^2 \frac{z}{2}\right)^2}{\left(\sinh^2 \frac{z}{2} + \cosh^2 \frac{z}{2}\right)^2} = \frac{4A \sinh^4 \frac{z}{2}}{2 \cosh^4 \frac{z}{2}} = 2A \tanh^4 \frac{z}{2} = f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{df}{f'} = \frac{2A \sinh \frac{z}{2} \cosh \frac{z}{2} dz}{U_\infty \tanh^3 \frac{z}{2}} = \frac{2A}{U_\infty} \left( \frac{2 \sinh \frac{z}{2} \cosh \frac{z}{2}}{\tanh^3 \frac{z}{2}} \right) dz \\ &= \frac{2A}{U_\infty} (2 \cosh^2 \frac{z}{2} \cosh \frac{z}{2}) dz \\ &= \frac{2A}{U_\infty} (4 \cosh^3 \frac{z}{2}) dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2A}{U_\infty} \left( \sinh \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \sinh^2 \frac{z}{2} \right) + \text{cte}$$

$z = \text{fonction de la vitesse}$   
 $\Leftrightarrow$   
 $\text{vitesse} = \text{fonction de } z$

(a)  $z$  réel entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$     i.e.  $z = \xi$  réel     $w = U_\infty \tanh \frac{\xi}{2}$  réel

$v \rightarrow 0 \rightarrow \text{segment } OA, OA'$

- 14 -

$$\begin{aligned} y=a & \quad \theta = \frac{\pi}{2} \\ y=-a & \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad )$$

$$\frac{2A}{U_{\infty}} \left( A \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cancel{\frac{\pi}{2}} \right) + \mathcal{I} = a$$

$$\frac{2A}{U_{\infty}} \left( \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) + \mathcal{I} = -a$$

$$\Rightarrow \frac{4A}{U_{\infty}} + \frac{2A}{U_{\infty}} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 2a$$

$$A \left[ \frac{4}{U_{\infty}} + \frac{2\pi}{U_{\infty}} \right] = 2a \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2a U_{\infty}}{\pi + 4}$$

$$C = 0$$

— N —

Prob de Corlette. Déterminer le champ de vitesse des fluides <sup>stationnaires</sup> d'un fluide visqueux (viscosité  $\mu$ ) entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Le tube intérieur se déplace suivant la génératrice du cylindre à la vitesse  $\vec{v}_0$ , le tube extérieur est fixe. (\*) Déterminer les forces <sup>de friction</sup> exercées par le fluide sur chaque cylindre - on cherche la solution sous la forme  $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z(r))$

h.8:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  admet pour composantes, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

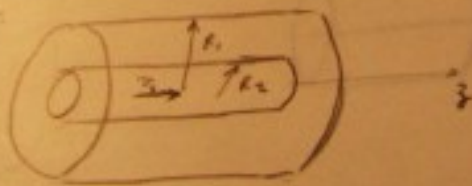
$$(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}, \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}, \Delta v_z).$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right)$$

Condition de contrainte  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}$

(\*) l'effet de gravitation sur l'écoulement est négligeable car le système est invariant par translation le long de la génératrice -  
montrer que le tenseur cauchy  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  est nul

Réponse:



$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \right) = 0$$

- 5 h2 -

- 5 -

$$-\nabla p + \mu \Delta \vec{v} = 0$$

"r"  $-\frac{\partial p}{\partial r} = 0$

"θ"  $-\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$

"z"  $-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z(r) = 0$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = 0$$

$$v_z = v$$

donc  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

(invariant par translation)  
par vrai en general

pour le fluide

solution  
pour la suite  
sans la forme

$$v(r) = A \log \left( \frac{r}{R_1} \right) + B$$

$$r = R_1 \quad v(R_1) = 0$$

$$B = 0$$

$$r = R_2 \quad v(R_2) = v_0$$

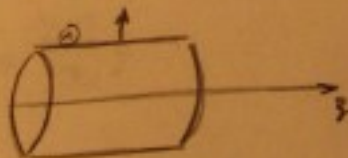
$$v_0 = A \log \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$A = \frac{v_0}{\log \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

$$v(r) = v_0 \frac{\log \left( \frac{r}{R_1} \right)}{\log \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

force de friction :

sur ②



$$\vec{T}_i = -\sigma_{ik} \vec{n}_k$$

$$\vec{T}_i^{(1)} = -(\sigma_{ir} \vec{n}_r + \sigma_{i\theta} \vec{n}_\theta + \sigma_{iz} \vec{n}_z)$$

$$= +\vec{t}$$

$$\vec{T}_i^{(1)} = -(\sigma_{ir} \vec{n}_r + \sigma_{i\theta} \vec{n}_\theta + \sigma_{iz} \vec{n}_z) = 0$$

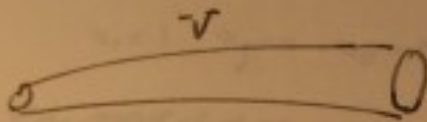
$$\sigma_{\theta r} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \neq 0$$

$$= \sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$$

# Appar de forces de frottement exercées par les fluides visqueux.

Soit un fluide dans un tube de fluide. Quelle est la force exercée par le fluide sur la paroi du tube.



On part de

On part de

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{F} + \vec{F}_S \rightarrow \text{Force de surface exercée par l'extérieur du tube de fluide sur le fluide dans le volume V}$$

$\downarrow$   
 force de pesanteur (de gravitation)

$$\vec{F}_S = \int_S \vec{T}(\vec{n}) dS$$

$$F_{ij} = \int_S t_i(\vec{n}) dS = \int_S T_{ij} n_j dS = \int_S [-p \delta_{ij} + \tau_{ij}] n_j dS$$

fluide incompressible

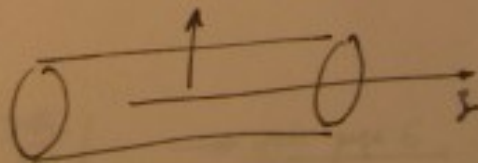
$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Dans notre cas

il s'agit de calculer

la force sur la paroi latérale par

unité de longueur du tube. c'est donc  $-\vec{F}_S$



- 5<sup>tes</sup> -

la neta de nafa

$$F_r = - (T_{rr} n_r + T_{r\theta} n_\theta + T_{rz} n_z)$$

$$n_r = 1 \quad n_\theta = 0 \quad n_z = 0 \quad \text{na nafa eotiva}$$

$$n_r = -1 \quad \text{na nafa neta}$$

$$v_z = v_0 \left( \frac{\log \left( \frac{r}{R_1} \right)}{\log \frac{R_2}{R_1}} \right)$$

$$= v_z(r)$$

$$v_r = v_\theta = 0$$

$$T_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$T_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$T_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$T_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$T_{\varphi z} = \mu \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right)$$

$$T_{zr} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$



na  $F_r = -p$  *na nafa*

$$F_\varphi = -T_{\varphi r} n_r = 0$$

$$F_z = -T_{rz} n_r = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R_1} \rightarrow \text{na pte 6.}$$

force de pression totale  $1.25 R_2$  (par unité de longueur de cylindre)

$$F_z^{(1)} = -(\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3) \quad \text{force de friction / par unité de surface}$$

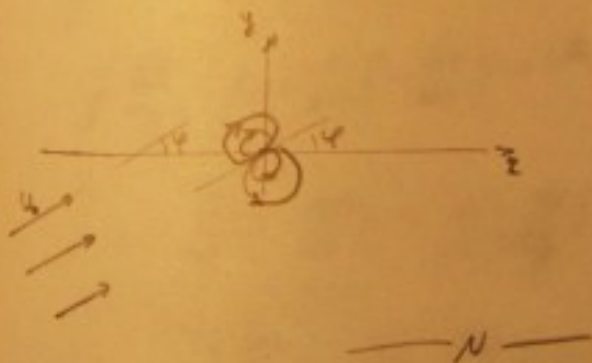
$$= -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = -\mu \frac{v_0}{R_1} \frac{1}{\log(R_2/R_1)}$$

force par unité de longueur  $= -2.5 \mu v_0 \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}}$

sur ②  $F_z^{(2)} = +\mu \frac{v_0}{R_2} \frac{1}{\log(R_2/R_1)} \rightarrow F_{\text{totale}} = 2.5 \mu v_0 \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}}$

— N —

- 3) Donner le potentiel complexe du doublet de moment  $\mu$ , faisant un angle  $\varphi$  avec  $ox$  (voir figure 4) et l'écoulement d'un fluide de vitesse uniforme  $U_0$  faisant le même angle  $\varphi$  avec  $ox$ . Situer les points d'arrêt.



Notes solutions pour "flot de Couette" basé sur le cours 1990-91  
page 4.5

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$w = w(r, \theta)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

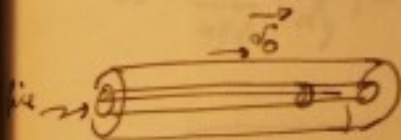
$$p = p(z)$$

stat stationnaire

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\}$$

Ici, en fait, on a invariance des rotations autour de  $oz$ .  
Donc le cas, ce que l'on entend par conducteur cylindrique  
c'est un conducteur de section quelconque de génératrice  $oz$ .

$$\text{Donc } w = w(r) \quad \Delta.$$



ici  $\frac{dw}{dz}$  n'est pas nul

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \text{cte}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{r}{\rho \nu} \left( \frac{dp}{dz} \right)$$

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{r^2}{2\rho \nu} \left( \frac{dp}{dz} \right) + A$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{r}{2\rho \nu} \left( \frac{dp}{dz} \right) + \frac{A}{r}$$

$$\boxed{w = \frac{r^2}{4\rho \nu} \left( \frac{dp}{dz} \right) + A \log r + B}$$

$$r = R_1 \quad \psi(R_1) = 0$$

$$r = R_2 \quad \psi(R_2) = \psi_0$$

$$\frac{R_1^2}{4\eta V} \left( \frac{dp}{dz} \right) + A \log R_1 + B = 0$$

$$\frac{R_2^2}{4\eta V} \left( \frac{dp}{dz} \right) + A \log R_2 + B = \psi_0$$

$$\Rightarrow A \log \frac{R_1}{R_2} + \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\eta V} \right) \frac{dp}{dz} = -\psi_0$$

$$A = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left[ -\psi_0 - \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\eta V} \right) \frac{dp}{dz} \right]$$

$$B = -\frac{R_1^2}{4\eta V} \left( \frac{dp}{dz} \right) - \frac{\log R_1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left[ \psi_0 + \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\eta V} \right) \frac{dp}{dz} \right]$$

$$\psi = \frac{r^2}{4\eta V} \left( \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\left[ \psi_0 + \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\eta V} \right) \frac{dp}{dz} \right] \log r}{\log \frac{R_1}{R_2}}$$

$$= -\frac{R_1^2}{4\eta V} \left( \frac{dp}{dz} \right) - \frac{\log R_1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left( \psi_0 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\eta V} \left( \frac{dp}{dz} \right) \right)$$

Le gradient de pression axial, on a

$$W = v_0 \frac{\log r}{\log \frac{R_2}{R_1}} - v_0 \frac{\log R_1}{\log \frac{R_2}{R_1}} = v_0 \frac{\log \frac{r}{R_1}}{\log \frac{R_2}{R_1}} = w$$

(3) Force de friction sur la paroi interne : / par unite de longueur.

$$F_g^{\text{ex}} = -\mu \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = -\frac{\mu}{R_1} \frac{v_0}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

Par unite de longueur.

$$2\pi R_1 F_g^{\text{ex}} = -\frac{2\pi\mu v_0}{\log \frac{R_2}{R_1}} > 0$$

(4) Sur la paroi externe  $\vec{n}$  est dirigé en sens contraire



$$F_g^{\text{ex}} = +\mu \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = +\frac{\mu}{R_2} \frac{v_0}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

Par unite de longueur.

$$2\pi R_2 F_g^{\text{ex}} = 2\pi\mu \frac{v_0}{\log \frac{R_2}{R_1}} < 0$$

juin 92

M.M.C

Écoulement stationnaire d'un fluide visqueux en rotation.

soit un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux, de viscosité  $\mu$  et de densité  $\rho$ , autour d'un axe vertical.

l'effet de gravitation n'étant pas considéré

on admet que les propriétés du fluide ne dépendent pas de

la composante  $z$  de la vitesse

le fluide, en coordonnées cylindriques, est

$$u=0, v=v(r,t), w=0$$

alors que la pression est  $p=p(r,t)$ . l'équation pour la

viscosité est d'avis Stokes est

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \right)$$

alors que la pression est donnée par

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$$

1. on cherche les solutions de (1) sous la forme

$$v(r,t) = \frac{f}{2\nu r} f(r,t)$$

où  $P$  est une constante et  $f(r, t)$  vérifie les conditions aux limites

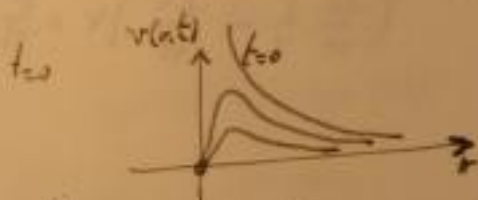
(1)  $f(r, 0) = 1$  (2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t) = 0$

1.a Donner la solution générale stationnaire de l'équation (1) et montrer que  $v(r, 0)$  est bien une solution de ce type.

1.b Montrer qu'on peut obtenir une solution pour  $f$  de la forme  $v(r, t) = f(\eta)$  avec  $\eta = \frac{r^2}{4vt}$ . Donner  $v(r, t)$ .

1.c Représenter graphiquement  $v(r, t)$  pour trois différents instants à partir de  $t=0$ . Justifier et la vérification des conditions (3) et (4)

$$v(r, t) = \frac{P}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4vt}} \right)$$



Réponse:

1.a Solution stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = \text{cte} = C_1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (rv) = C_1 r$$

$$\Rightarrow rv = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \rightarrow v = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$v(r, 0) = \frac{r}{2\pi r}$$

$$\frac{r}{2\pi} = C_2 \Rightarrow r = 2\pi C_2$$

1.b Equation pour f :

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f(r, t)) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

$$= \nu \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

$$f(r, 0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dy} \left( -\frac{t^2}{4\nu t^2} \right) \quad y = \frac{t^2}{4\nu t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dy} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{df}{dy} \frac{2r}{4\nu t} = \frac{1}{2} \frac{r}{\nu t} \frac{df}{dy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{d}{dy} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{2\nu t} \frac{df}{dy} \right)$$

$$= \frac{1}{2vt} \frac{df}{d\eta} + \frac{r}{2vt} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{df}{d\eta} \right)$$

$$= \frac{1}{2vt} \frac{df}{d\eta} + \frac{r}{2vt} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{df}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{2vt} \frac{df}{d\eta} + \frac{r}{2vt} \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{1}{2vt} \frac{df}{d\eta} + \frac{r^2}{4v^2 t^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

Donc

$$\frac{df}{d\eta} \left( -\frac{r^2}{4v^2 t^2} \right) = v \left( \frac{1}{2vt} \frac{df}{d\eta} + \frac{r^2}{4v^2 t^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \frac{1}{v} \frac{r}{2vt} \frac{df}{d\eta} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f' + f'' = 0}$$

Donc

$$f + f' = \alpha_1 = f(\eta) + \frac{df}{d\eta} = \alpha_1$$

équation homogène

$$f(\eta) + \frac{df}{d\eta} = 0$$

Solution

$$f(\eta) = e^{-\eta}$$

Variation de la constante

$$\alpha_1 = C(\eta) e^{-\eta} + C'(\eta) e^{-\eta} = C(\eta) e^{-\eta}$$

$$C'(\eta) = \alpha_1 e^{\eta} \rightarrow C(\eta) = \alpha_1 e^{\eta} + \alpha_2$$

Donc

$$f(\eta) = e^{-\eta} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{\eta}$$

$$f(r, 0) = 1 \quad f(\eta = \infty) = f(\eta = 0)$$

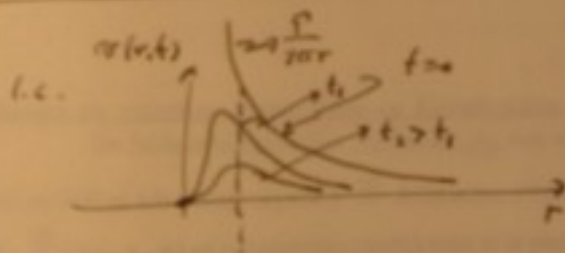
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} f(\eta) = 0 \quad f(0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\eta) = \alpha_1 = 1 \quad f(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

Donc

$$f(\eta) = 1 - e^{-\eta}$$

$$u(r, t) = \frac{r}{2\alpha r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\alpha t}} \right)$$



$$t \rightarrow 0 \quad u(r, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{2\alpha r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\alpha t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{2\alpha r} \left( \frac{r^2}{4\alpha t} \right) = 0$$

$$t_2 > t_1 \quad e^{-\frac{r^2}{4\alpha t_2}} > e^{-\frac{r^2}{4\alpha t_1}} \quad \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1} \quad -\frac{1}{t_2} > -\frac{1}{t_1}$$

$$u(r, t_2) < u(r, t_1)$$

Session de Septembre  
Mécanique des Milieux Continus

I Soit l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible provoqué par un doublet d'intensité  $\mu$  placé à la distance  $a$  d'un plan fixe vertical. Le flot est bidimensionnel parallèle au plan  $xoy$ , le fluide est au repos à l'infini et les forces de volume sont négligées. Le doublet est orienté dans la direction des  $x > 0$ . (figure 1).

1: Par la méthodes des images, calculer le potentiel complexe du flot. En déduire la vitesse complexe.

2: Donner la pression en un point quelconque de la paroi. Montrer qu'elle est minimum à la distance  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$  de l'origine.

II Fluides en rotation. Application en Géophysique

Un fluide incompressible, de densité  $\rho_0$ , non visqueux, est en rotation autour de l'axe vertical  $oz$  à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ . L'équation d'Euler linéarisée pour la vitesse du fluide  $\vec{V} = (u, v, w)$  en coordonnées cartésiennes et la pression  $p$  est

$$(S1) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 0$$

De plus, on a :

$$(S2) \quad \text{div}(\vec{V}) = 0$$

Il s'agit tout d'abord d'obtenir une équation pour  $w$ .

1: Par action des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$  aux composantes "x" et "y" de (S1) et par combinaisons linéaires, déduire l'équation

$$(E1) \quad \frac{1}{\rho_0} \Delta_+ \frac{\partial p}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + F^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{où} \quad \Delta_+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad F = 2 \Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = |\vec{\Omega}|$$

2: En dérivant (E1) par rapport à  $z$  et en utilisant la composante "z" de (S1), obtenir une équation pour  $w$  faisant intervenir les opérateurs  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ,  $\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  et la constante  $F$ .

3: On cherche des solutions en ondes planes pour  $w$  de la forme  $w = w_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + k_z z - \omega t)}$  appelées ondes inertielles,  $\vec{r} = (x, y)$ ,  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ . Soit  $\vec{k} = (\vec{k}_{\perp}, k_z)$ .

Donner la relation de dispersion pour de telles ondes. La pulsation  $\omega$  ne peut dépasser un certain seuil  $\omega_1$ . Quel est il pour une vitesse de rotation  $\vec{\Omega}$  donnée ?

4: Calculer la vitesse de groupe  $\vec{c} = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right)$ . Montrer que cette vitesse de groupe est orthogonale à la direction de propagation (On montrera que  $\vec{c} \cdot \vec{k} = 0$ ).

5: Ondes inertielles dans une couche fluide. La vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  est supposée être perpendiculaire à une couche fluide située entre 2 frontières rigides  $z=0$  et  $z = -h$ . Soit une onde de la forme  $w = w_0 \sin k_z(z+h) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .

a: Cette onde est elle solution de l'équation obtenue en 2)? Interpréter.

b: Donner les valeurs possibles pour  $k_z$  ainsi que les fréquences acceptables. Tracer schématiquement  $\omega = \omega(k)$ .

c: De telles ondes se produisent dans les océans et dans l'atmosphère. L'approximation d'une couche fluide avec frontières planes est justifiée pour des ondes de longueur d'onde petite par rapport au rayon de la terre en rotation. Cependant, dans ce cas,  $\vec{\Omega}$  n'est pas nécessairement dirigée suivant  $oz$ . On choisit le système d'axes indiqué sur la figure 2 tel que  $\vec{\Omega} = (0, \Omega_y, \Omega_z)$ .

Montrer que l'équation pour  $w$  est alors ici de la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + 4(\vec{\Omega} \wedge \vec{\nabla})^2 w = 0$$

Pour cela, on appliquera le rotationnel à (S1) et on utilisera l'identité

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\Omega} \wedge \vec{\nabla}) = -(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \quad (\text{valable ici avec } \text{div}(\vec{\nabla}) = 0).$$

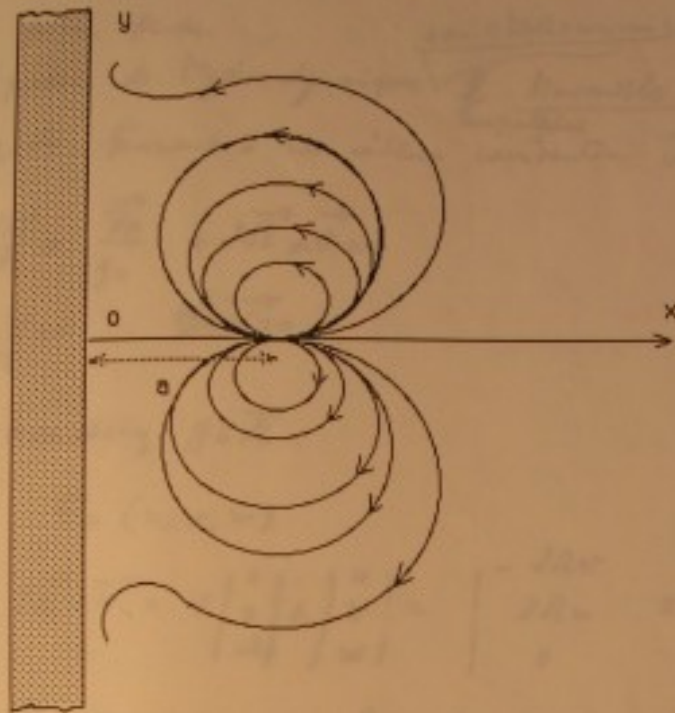


Figure1

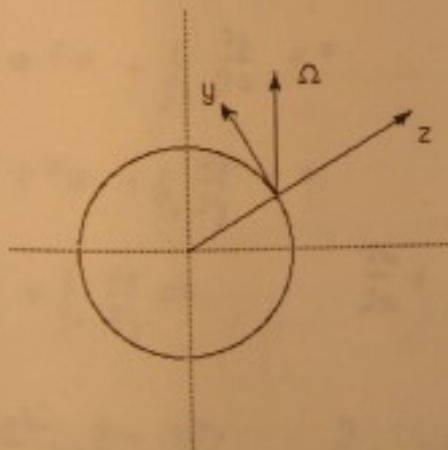


figure2

## II. Fluides en rotation

saire fixe.

non stationnaire

Equation de l'hydrodynamique  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  linéaire, fluide incompressible  
 $\rho = \text{cte}$  tournant à une vitesse constante  $\vec{\Omega}$ ,  
 angulaire

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

1) Axe des  $z \parallel \vec{\Omega}$

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\Omega v \\ 2\Omega u \\ 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} -Fv \\ Fu \\ 0 \end{vmatrix}$$

où  $F = 2\Omega$  Paramètre de Coriolis.

①  $\frac{\partial u}{\partial t} + Fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

②  $\frac{\partial v}{\partial t} + Fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

③  $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Equation pour  $w$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + F \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + F \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta_+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{f_0} \Delta_+ p = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{f_0} \Delta_+ p = \frac{\partial w}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 1 \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - F \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 2 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + F \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - F \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + F \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F \frac{\partial w}{\partial z}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow (4)$$

$$\text{So } \frac{1}{f_0} \Delta_+ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial w}{\partial z} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + F^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5')$$

$$\Delta_+ \rightarrow (4) \quad \Delta_+ \frac{\partial u}{\partial t} - F \Delta_+ v + \frac{1}{f_0} \Delta_+ \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\Delta_+ \frac{\partial u}{\partial t} - F \Delta_+ v + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + F \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0$$

-23-

$$\Delta_+ \frac{\partial u}{\partial t} - F \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + F \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0$$

$$\Delta_+ \frac{\partial u}{\partial t} - F \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - F \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t \partial z} = 0$$

$$\Delta_+ \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) - F \frac{\partial}{\partial y} \left( - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\boxed{\Delta_+ \frac{\partial u}{\partial t} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + F \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial z}} \quad (6)$$

$\Delta_- \rightarrow (2)$

$$\boxed{\Delta_+ \frac{\partial v}{\partial t} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} + F \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial z}} \quad (7)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$  de (6) +  $\frac{\partial}{\partial y}$  de (7) ~~par une addition~~ par une addition

$$\Delta_+ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} \Delta_+ \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{identité (..) !}$$

Donc on conclut

$$\Delta_+ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial w}{\partial z} + F \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y^2 \partial z} - F \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial z}$$

Ans Non

$$\frac{\partial}{\partial y} \text{ de } (6) - \frac{\partial}{\partial x} \text{ de } (7)$$

$$\Delta_+ \frac{\partial u}{\partial y \partial t} - \Delta_+ \frac{\partial v}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^3}{\partial x \partial t \partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - F \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$+ \frac{\partial^3}{\partial t \partial y \partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - F \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Delta_+ \frac{\partial}{\partial t} \left( -F \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -F \Delta_+ \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{identite (!)}$$

De (5) on derive par rapport à  $z$ .

$$\frac{1}{F_0} \Delta_+ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial z^2} + F^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

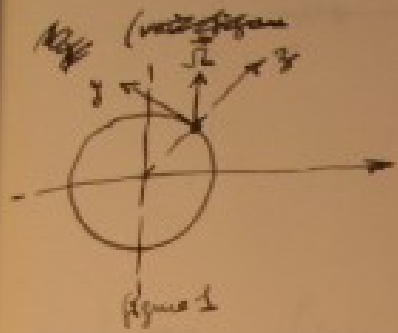
↓ avec (3)

$$-\frac{1}{F_0} \Delta_+ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial z^2} = F^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + F^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0}$$

$$\Delta = \Delta_+ + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Cependant, dans ce cas  $\vec{R}$  n'est pas nécessairement dirigé  $oz$   
 On choisit comme système d'axes  
 indiqués on la figure 1 tel que  
 $\vec{R} = (0, R_y, R_z)$   
 Montrer que l'équation (1) est  
 remplacée par



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + 4(\vec{R} \cdot \vec{\nabla})^2 w = 0$$

Puis, on applique la rotationnel  $\vec{\nabla} \times$  (1) et on  
 utilise l'identité  $\text{rot}(\vec{R} \wedge \vec{v}) = -(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$   
 quand  $\text{div} \vec{v} = 0$ .

~~~~~

Réponse: on a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial z} \right) - 2(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) u = 0 \quad a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 2(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) v = 0 \quad b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) w = 0 \quad c)$$

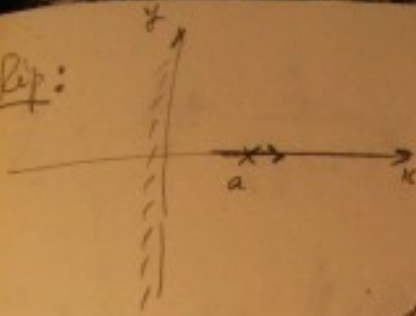
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad d) \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{ de a) } , \frac{\partial}{\partial x} \text{ de b) et on veut$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w - \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

on applique $\frac{\partial}{\partial t}$ et on utilise c) et d)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + 4(\vec{R} \cdot \vec{\nabla})^2 w = 0$$

1) Rep:



Fluide au repos à l'infini

Doublé
d'intensité μ pour a .

Donc la poutre $f(z) = -\frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{1}{z-a} \right)$

Doublé image en $z = -a$. Axe conjugué

$$f(z) = \frac{-\mu}{\pi} \left(\frac{1}{z-a} \right) + \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{z+a} = \frac{\mu}{\pi} \left[\frac{1}{z+a} - \frac{1}{z-a} \right]$$

$$= \frac{\mu}{\pi} \left[\frac{(z-a) - (z+a)}{z^2 - a^2} \right] = \frac{\mu(-2a)}{\pi(z^2 - a^2)} = f(z)$$

Vitesse complexe $\frac{dz}{dz} = u - iv$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{-2a\mu}{\pi} \frac{(-2z)}{(z^2 - a^2)^2} = u - iv = V$$

Pression en fait blo poutre :

$$p + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 = p_{\infty}$$

Donc pour $x=0$ $z = iy$

$$\frac{dH}{dy} = \frac{4\sigma\mu}{\pi} \frac{y}{(y^2+a^2)^2}$$

$$\Rightarrow p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{8\sigma\mu a^2}{\pi^2} \frac{y^2}{(y^2+a^2)^4}$$

Minimum de $p \equiv$ maximum de $\frac{|y|}{(y^2+a^2)^2}$

$$\begin{aligned} \underline{y > 0} \quad \left(\frac{y}{(y^2+a^2)^2} \right)' &= \frac{-2y(y^2+a^2) \cdot 2y + (y^2+a^2)^2}{(y^2+a^2)^4} \\ &= \frac{(y^2+a^2)[-4y^2 + (y^2+a^2)]}{(y^2+a^2)^4} = \frac{1}{(y^2+a^2)^3} [-3y^2 + a^2] \end{aligned}$$

$$\text{Dérivée} = 0 \quad \text{pour } y = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

— ~ — (fin de I)

- 25 -



onde plana

$$w = w_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y)$$

$$k_z = (k_x, k_y)$$

ondes inertielle . Relation de dispersion.

$$(\vec{k}^2 + k_z^2) \omega^2 - F^2 k_z^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{F^2 k_z^2}{k^2 + k_z^2}$$

$$\omega^2 = \frac{F^2 k_z^2}{k^2} = F^2 \cos^2 \theta$$

$$\omega = \frac{F k_z}{k}$$

valeur d'onde $\vec{k}$ fait un angle

θ avec l'axe oz



θ et k_z : ω est fixé

Remarque :

(Rem : F a la dimension d'une fréquence)

$$F = 2\Omega$$

la pulsation ω ne peut dépasser $F = 2\Omega$ ($\cos^2 \theta \leq 1$) ou Ω est la fréquence de rotation du fluide.

vector de grandeur :

$$\vec{C} = \vec{P}_K \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{e}}, \frac{\partial \omega}{\partial e_3} \right) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{e}}, \frac{\partial \omega}{\partial e_3}, \frac{\partial \omega}{\partial e_3} \right)$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial e_3} = \frac{F^2 [2e_3 (e^2 + \frac{1}{3}) - 2e_3 \frac{1}{3}]}{(e^2 + e_3^2)^2} = \frac{2e_3 e^2 F^2}{(e^2 + e_3^2)^2}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial e_3} = 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial e_3} \quad \frac{\partial \omega}{\partial e_3} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial e_3}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial e_3} = \frac{\sqrt{e^2 + e_3^2}}{2F \frac{1}{3}} \frac{2e_3 e^2 F^2}{(e^2 + e_3^2)^2} = \frac{F e^2}{(e^2 + e_3^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{F e^2}{k^3} = \frac{\partial \omega}{\partial e_3}}$$

$$k^2 = (e^2 + e_3^2)^2 \quad k = (e^2 + e_3^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \omega(e, e_3)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \omega}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \omega}{\partial e} \frac{\vec{e}}{e = |\vec{e}|}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\omega^2 = \frac{F^2 e^2}{e^2 + e_3^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{e}} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial \vec{e}}$$

$$= \frac{-\sqrt{e^2 + e_3^2}}{2F \frac{1}{3}} \frac{F^2 e^2}{(e^2 + e_3^2)^2}$$

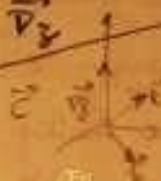
$$= - \frac{F e_3 e}{(e^2 + e_3^2)^{3/2}} = - \frac{F e_3 e}{k^3}$$

$$\text{et } \frac{\partial \omega}{\partial \vec{e}} = \frac{-\vec{e}}{k} + \frac{e_3 \vec{e}}{k^3} = \boxed{-\frac{\vec{e}}{k^2} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{e}}}$$

Don

monter que

$$\vec{C} = -\vec{k} \frac{\omega}{k^2} + \frac{F E^2}{k^3} \vec{D}_3$$



$$\vec{k} = (E + \frac{1}{3}) \vec{z}$$

$$\vec{C} = (-\vec{k} \frac{\omega}{k^2} + \frac{F E^2}{k^3} \vec{z})$$

$$\vec{k} \cdot \vec{C} = (E + \frac{1}{3}) \cdot (2 + 0)$$

$$= 2E + \frac{2}{3}E$$

$$= -\frac{2}{k^2} \omega + \frac{F E^2}{k^3} \vec{z} = 0 \text{ car } \omega = \frac{c k}{2}$$

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{C} = 0}$$

En deduire que la vitesse de groupe est orthogonale à la direction de propagation. (on calcule $\vec{C} \cdot \vec{k}$)

initiales)

- 23 -

- Applications en Géophysique

Onde dans une couche fluide.

Portance angulaire $\vec{r}$ suppose être perpendiculaire à la couche fluide. Interface entre $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ rapide $z=0$ et $z=h$.

Soit une onde de la forme

$$w = w_0 \sin k_z (z+h) e^{i(k^2 x^2 - \omega t)}$$

où w signifie la relation de dispersion précédemment

a. ...

b. ...

a. Cette onde est elle rotation de l'équation? Interpréter.

b. ... Donner la valeur possible pour k_z

$$\sin k_z h = 0 \quad k_z = \frac{n\pi}{h} \quad n=1,2,\dots$$

ainsi que la fréquence acceptable.



$$\omega^2 = \frac{F^2 k^2 x^2}{k^2 (k^2 + \frac{x^2 k^2}{h^2})}$$

Travaux théoriques

$$\omega = \omega(k)$$

c. De telles ondes se produisent dans la nature et dans l'atmosphère. on l'approximait d'une couche fluide avec l'atmosphère. on l'approximait d'une couche fluide avec l'atmosphère. on l'approximait d'une couche fluide avec l'atmosphère. on l'approximait d'une couche fluide avec l'atmosphère.

Mécanique des fluides

I. Forces sur les parois.

Soit un fluide incompressible de masse volumique ρ en écoulement stationnaire dans une canalisation cylindrique horizontale présentant un élargissement (voir figure 1).

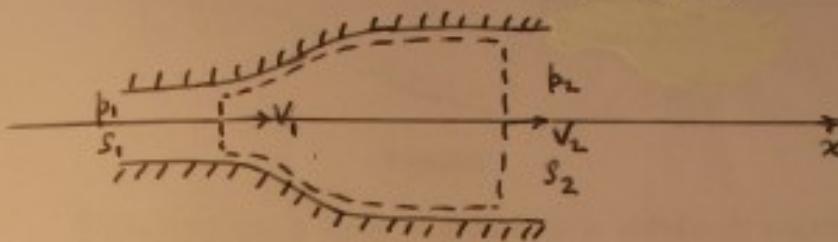


Figure 1

1: A l'aide de la formule d'Euler

$$\int_{S_1+S_2} \rho v^2 \vec{n} dS = \sum_i \vec{F}_i = \text{Somme des forces}$$

extérieures et de pression agissant sur le tube, calculer la force de pression F_p exercée par le fluide sur les parois latérales de la conduite en fonction de $p_1, p_2, S_1, S_2, v_1, v_2$ et ρ . Les quantités fluides sont supposées constantes dans une section donnée, les forces de gravitation ne sont pas considérées.

p_1, v_1 (resp p_2, v_2) sont la pression et la vitesse du fluide sur la section S_1 (resp S_2)

2: Utiliser l'équation de Bernoulli et la loi de conservation de la masse pour exprimer la force F_p en fonction de p_1, ρ, v_1, S_1 et S_2 .

II. Poussée d'un réacteur.

Soit un réacteur, utilisant Q kg d'air par seconde (voir figure 2). Le système de coordonnées est lié au moteur. La vitesse de l'air pénétrant dans l'appareil est v_1 . L'air pénètre à la pression atmosphérique p_a (s'il n'y a pas d'onde de choc). Dans le moteur, l'air est comprimé et chauffé par la combustion. Il quitte la tuyère avec une grande vitesse de sortie v_2 .

Une surface de contrôle S est prise avec une section S_1 suffisamment en amont pour que la pression et la vitesse sur S_1 soient p_a et v_1 . Dans la section S_2 , la pression est p_2 et la vitesse

v_2 . Le débit de carburant étant nettement plus faible, il n'est pas considéré.

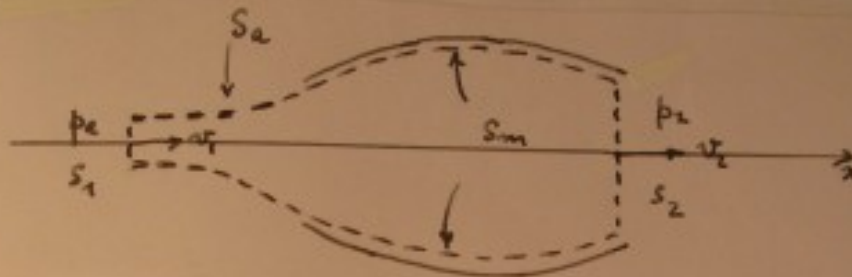


Figure2

On appelle S_a la surface latérale de la surface de contrôle extérieure au moteur et S_m la surface latérale constituée par le moteur. Soit p la pression à l'intérieur de la surface de contrôle. On applique ici aussi la formule d'Euler (voir plus haut).

On appelle trainée du moteur la quantité $T = - \int_{S_a + S_m} (p - p_a) n_x dS$.

F_e est la somme des forces de pression agissant sur la surface externe du moteur et F_t la force agissant sur le moteur ($F_t = F_e + F_p$ où F_p est la force qu'exerce le fluide en écoulement sur la surface interne du moteur).

On appelle poussée du moteur la quantité $P = -F_t + T$. Donner l'expression de la poussée en fonction de Q , v_1 , v_2 , p_a , p_2 et S_2 .

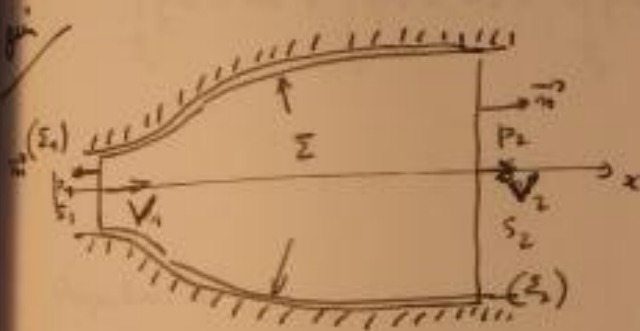
AN : la vitesse d'un turboréacteur est 350m/s. Le débit massique d'air entrant est 100 kg/s. La vitesse d'éjection des gaz est 600m/s et la pression dans les gaz d'éjection est égale à la pression ambiante. Calculer la poussée du moteur.

NB : on a la relation $\int n_x dS = 0$ sur toute surface fermée.

.....

PT

5. Forces sur la paroi d'une conduite de évolution de section variable.



Écoulement stationnaire (fluide incompressible) horizontale
Forme d'Euler

$$\sum F_x = \int_{S_1} \rho v^2 \frac{u}{x} dS + \int_{S_2} \rho v^2 \frac{u}{x} dS$$

pression
+
force pression
agissant sur la tube

$$= - \int_{S_1} p \vec{n} dS - \int_{S_2} p \vec{n} dS - \vec{F}_p$$

force exercée par
la paroi sur le fluide

$\vec{F}_p$: force exercée par la tube
sur la paroi

3. la formule d'Euler

$$\int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \text{Somme des forces de traction} = \sum_i \vec{F}_i = \text{agissant sur le tube}$$

Calculer la force $\vec{F}_p$ exercée par le tube sur les parois latérales de la conduite en fonction de $p_1, p_2, S_1, S_2, u_1, u_2$ et g .
Les parois fluides sont collées, constante dans une section donnée.
Réponse:

$$\int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_1} p \vec{n} dS - \int_{S_2} p \vec{n} dS - \vec{F}_p$$

$\vec{F}_p$ = force exercée par la tube sur paroi

$-\vec{F}_p$ = force exercée par paroi sur tube

Projection "x"

$$\Rightarrow \int_{S_1} \rho v^2 dS + \int_{S_2} \rho v^2 dS = \int_{S_1} p dS - \int_{S_2} p dS - F_{px}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_p = \int_{S_1} (p + \rho v^2) dS - \int_{S_2} (p + \rho v^2) dS}$$

on applique directement la formule page 37

$$\boxed{F_p = (p_1 + \rho u_1^2) S_1 - (p_2 + \rho u_2^2) S_2}$$

Équation de Bernoulli
le long d'une ligne
de courant.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho u_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho u_2$$

$u_1 \approx u_2$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2)$$

Conservation de la masse. ($\rho = \text{cte}$)

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad V_2 = V_1 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)$$

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) = p_1 - \frac{1}{2} \rho \left(V_1^2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - V_1^2 \right)$$

$$\Rightarrow F_p = p_2 S_1 + \rho V_1^2 \frac{S_1}{2} - \left[p_1 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 V_1^2 \right] S_2 - \rho S_2 V_1^2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2$$

$$= p_1 (S_1 - S_2) + \rho V_1^2 \frac{S_1}{2} - \frac{1}{2} \rho V_1^2 S_2 - \rho S_2 V_1^2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho S_2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 V_1^2$$

$$= p_1 (S_1 - S_2) + \rho V_1^2 \frac{S_1}{2} - \frac{1}{2} \rho V_1^2 S_2 - \rho V_1^2 \frac{S_1^2}{S_2} + \frac{1}{2} \rho V_1^2 \frac{S_1^2}{S_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} - 2 = p_1 (S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho V_1^2 S_1 \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} - 2 \right)$$

$$\boxed{F_p = p_1 (S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho V_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2}$$

Donc
De l'équation de Bernoulli et de la conservation de la masse,
calculer la force F_p en fonction de p_1 , ρ , V_1 , S_1 et S_2

— N —

Propriété d'un vecteur

Reponse

$$F_c = \int_{S_1+S_2} p \vec{v}_n dS$$

Summe des forces collectives et de pression exercées sur la surface de contrôle

$$-F_p = - \int_S p \vec{v}_n dS + p_1 S_1 - p_2 S_2$$

$$= Q \vec{v}_2 - Q \vec{v}_1$$

$Q = \int_S \rho \vec{v}_n dS$
 $= \rho_1 \vec{v}_1 S_1$
 $= \rho_2 \vec{v}_2 S_2$

$$-F_p = Q \vec{v}_1 - Q \vec{v}_2 + p_2 S_2 - p_1 S_1 + \int_{S_2} p \vec{v}_n dS$$

$$F_{ec} = \int_{S_{ec}} p \vec{v}_n dS$$

F_{ec} Somme des forces de pression qui exercent sur la surface externe du système
 la force est due (interne et externe) somme de la pression et de la force de gravité

$$\Rightarrow F_T = F_p + F_e = -(Qv_2 - Qv_1 + p_2 S_2 - p_1 S_1) + \int_{S_a + S_m} p n_x ds$$

$$\Rightarrow \int_{S_1 + S_2 + S_a + S_m} p n_x ds = 0$$

$$F_T = -(Qv_2 - Qv_1 + p_2 S_2 - p_1 S_1) + \int_{S_1 + S_2 + S_a + S_m} p n_x ds - \int_{S_a + S_m} p n_x ds$$

$$= -(Qv_2 - Qv_1 + p_2 S_2 - p_1 S_1) - p_1 S_1 + p_2 S_2 - \underbrace{\int_{S_a + S_m} (p - p_a) n_x ds}_T$$

dim

$$-P = -(Qv_2 - Qv_1 + p_2 S_2) + p_1 S_1$$

$$P = Q(v_2 - v_1) + S_2(p_2 - p_1)$$

— N —

$$AN \quad P = 90 \times (620 - 300) = 28800 \text{ kg m s}^{-2}$$

$$v_2 S_2 = v_1 S_1$$

$$v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_2$$

AN =

$$P = 100 (600 - 350)$$

$$= 100 \times 250 = 25000 \text{ kg m s}^{-2}$$

P vs

Q = debit

$$P = [Q] \text{ LT}^{-1}$$

$$= \text{MT}^{-1} \text{ LT}^{-1} = \text{MLT}^{-2}$$

$$T = - \int_{S_e + S_m} (p - p_a) n_x dS$$

Euler: $F = \int_{S_1 + S_2} p v^2 n_x dS$

force des forces
extérieures et de
pression exercées
sur la surface de contrôle

$$Q = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

n dirigé vers l'extérieur.

$$- \hat{F}_p = - \int_{S_a} p n_x dS + p_a S_1 - p_2 S_2$$

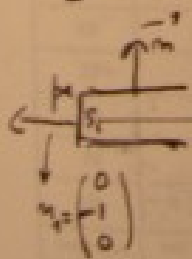
force exercée par le fluide
sur la surface interne du
moteur

$$= Q v_2 - Q v_1$$

On a $F_e = - \int_{S_m} p n_x dS$

$$- \int_S p \vec{n} dS$$

$$F_t = F_e + F_p$$



$$= - (Q v_2 - Q v_1) + p_a S_1 - p_2 S_2$$

$$- \int_{S_a + S_m} p n_x dS$$

$$\int_{S_1+S_2+S_a+S_m} \overset{\text{constant}}{p_a} n_x dS = 0$$

$$\Rightarrow F_t = -(Qv_2 - Qv_1) + p_a S_1 - p_2 S_2 + \int_{S_1+S_2+S_a+S_m} p_a n_x dS - \int_{S_a+S_m} p n_x dS$$

$$= -(Qv_2 - Qv_1) + \cancel{p_a S_1} - p_2 S_2 + \underbrace{\int_{S_a+S_m} (p_a - p) n_x dS}_T$$

$$= T - P$$

$\dot{Q}_{\text{in}}$

$$-P = -(Qv_2 - Qv_1) - p_2 S_2 + p_a S_2$$

$$\boxed{P = Q(v_2 - v_1) + (p_2 - p_a) S_2}$$

$\text{kg/s} \times \text{m/s}.$

$$P = 100 \times (600 - 350) \\ = 100 \times 250 = 25000 \text{ kg m/s}^2$$

Cours de Physique

Mécanique des Fluides Continues

II Soit un fluide compressible en mouvement ^{stationnaire} ~~stationnaire~~ dans une canalisation ^{horizontale} présentant une section variant rapidement sur une faible distance. (voir figure). Le flux est considéré isentropique (sans friction et adiabatique).

De l'équation de conservation de la masse et de la relation



$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{h-1} \frac{dp}{p} = 0$$

on ρ, p, ρ sont les vitesses, pression, et densité dans toute section droite. ^{on a} la relation ^{entre} $\frac{d\rho}{\rho}$ et $\frac{ds}{s}$ et la relation de Poiseuille en tout point s . (s est l'aire de la section). $\therefore \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{s} \frac{ds}{ds} \left(\frac{1}{M^2 - 1} \right)$ - Conclusion.

Rappel: $p = \rho g R T$, $c = \sqrt{h g R T}$: vitesse du son.

Application de la formule de Fourier pour le calcul de Q en W
 l'épaisseur et la température dans la section 1 sont ρ_1 , l_1 en m et T_1 , T_2
 l'épaisseur, la densité et la température dans la section 2.

AN. $Q = 2400$ $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$ $T_1 = 15^\circ C$ $S_1 = 1 \text{ m}^2$ $S_2 = 0,6 \text{ m}^2$
 N. 14. $R = 29,2 \text{ W/m}^2$ $l = 10 \text{ cm}$

On a donc, $\frac{dS}{dx} = \frac{S_2 - S_1}{L}$ (Maintien linéaire de l'épaisseur de la paroi
 lorsque L)

— N —

Qp 1

Qp

$$p + \rho s = 0$$

$$(1) \frac{d}{dt}(p + \rho s) = 0 \Rightarrow \rho \frac{ds}{dt} + s \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{ds}{dt} = 0$$

$$(2) \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = 0$$

$$= v \frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right)$$

$$(3) \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{dt} = 0$$

$$Ma^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{\gamma R T}$$

$$p = \rho \gamma R T$$

$$\frac{p}{\rho \gamma} = T$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \gamma \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

$$(2) \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho \gamma} \frac{d\rho}{dt}$$

$$v \frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow v \frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{\rho} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$(3) v \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho \gamma} \frac{d\rho}{dt} = - \frac{1}{\rho} v \frac{dv}{dt} = - \frac{\gamma}{\rho \gamma R T} v \frac{dv}{dt}$$

-Rep2-

2' En (1) (2) (3) >>

$$\frac{1}{\gamma g R T} \left(-v \frac{dv}{ds} \right) + \frac{1}{s} \frac{ds}{ds} + \frac{1}{v} \frac{dv}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} \frac{dv}{ds} (1 - Ma^2) + \frac{1}{s} \frac{ds}{ds} = 0$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{ds} = \frac{\frac{1}{s} \frac{ds}{ds}}{Ma^2 - 1}$$

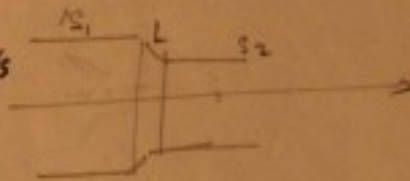
AN:

$$g_1 = \frac{p_1}{\gamma R T_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{9.81 \times 29.2 \times 283} \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_1 = \frac{\rho}{\gamma_1 s_1} = \frac{2}{s_1} \text{ m/g}$$

$$c_1 = \sqrt{\gamma g R T_1} = \sqrt{1.4 \times 9.81 \times 29.2 \times 283} \text{ m/s}$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_1}$$



$$\frac{ds}{ds} = \frac{s_2 - s_1}{L}$$

$$a = 2 \text{ kg/s}$$

$$T_1 = 10^\circ \text{C} = 283^\circ \text{K}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$p_1 = 100 \text{ kN/m}^2$$

$$s_1 = 1 \text{ m}^2$$

$$s_2 = 0.6 \text{ m}^2$$

$$\frac{1}{v_1} \frac{\Delta v_1}{L} = \frac{1}{s_1} \frac{\Delta s_1}{L} \left(\frac{1}{Ma_1^2 - 1} \right)$$

$$\Delta v_1 = \frac{v_1 K}{s_1} \frac{\Delta s_1}{K} \left(\frac{1}{Ma_1^2 - 1} \right)$$

$$\Delta v_1 = -v_1 (0.64) \left(\frac{1}{Ma_1^2 - 1} \right)$$

$$v_2 - v_1 = \Delta v$$

$$v_2 = v_1 + \Delta v$$

$$v_1 = \frac{Q}{\rho_1 S_1} \rightarrow \boxed{\rho_2 = \frac{Q}{v_2 S_2}}$$

Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} g R T = c^2$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} g R T_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} g R T_2$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} g R (T_2 - T_1) = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}$$

$$\boxed{T_2 = T_1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{1}{g R} \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \right)}$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = g R T_2 \Rightarrow \boxed{p_2 = \rho_2 g R T_2}$$

N

Licence de Physique

Mécanique des Milieux Continus

Instabilité de Rayleigh - Taylor en Magnétohydrodynamique

R. On considère un fluide non chargé de m.vol ρ dans le champ de pesanteur. Si p est la pression et si le fluide est incompressible (ce qui sera vérifié par la suite) les équations régissant son évolution sont

$$\begin{cases} (\partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} \\ (\partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

$\vec{u}$ est le champ de vitesses, p la pression, ρ la m.vol et $\vec{g}$ le champ de gravitation. Les grandeurs physiques, à l'équilibre, sont repérées par l'indice 0. Ainsi $\vec{\nabla} p_0 = \rho_0 \vec{g}$, $\partial p_0 / \partial t = 0$, $\vec{u}_0 = 0$.

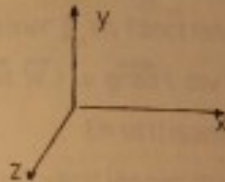
1) A l'équilibre, $\rho_0(x,y,z) = \rho_0(y)$ est donnée et soit $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $\vec{u} = \vec{u}'$. Ecrire les équations linéarisées au voisinage de l'équilibre.

2) On cherche les solutions sous la forme $X(y) \exp i(kz - \omega t)$ où X peut dépendre de k et ω . On utilisera la correspondance $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\vec{\nabla} \rightarrow ik\hat{z} + \hat{y}\partial/\partial y$.

Montrer que l'équation vérifiée par $U(y)$ telle que $u'_y = U(y) \exp i(kz - \omega t)$ est

$$a) \quad d/dy (\rho_0 dU(y)/dy) - k^2 \rho_0 U(y) - k^2 g / \omega^2 (d\rho_0/dy) U(y) = 0$$

3) On se propose de déterminer la condition de stabilité de l'équilibre d'un fluide de m.vol ρ_1 constante superposé à un fluide de m.vol ρ_2 constante



$$\rho_0(y) = \rho_1 \quad y > 0$$

$$\rho_2 \quad y \leq 0$$

Déterminer $u'_y(y)$, sachant que $u'_y = 0$ à l'infini. En intégrant a) par rapport à y , dans l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$ autour de $y=0$ et en faisant tendre ε vers 0, donner la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ où $\omega(k)$ dépend de g , ρ_1 et ρ_2 . En posant $\omega = a + ib$, montrer que l'équilibre est stable ($b=0$) si $\rho_1 \leq \rho_2$ et instable si $\rho_1 > \rho_2$.

B) Le fluide incompressible est à présent chargé. Les équations caractérisant son mouvement sont alors

$$b) \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

$$c) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \rho = 0$$

$$d) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

auxquelles on doit ajouter les équations du champ électromagnétique

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

1) Le champ magnétique $\vec{B}_0$, à l'équilibre, est uniforme et constant dans la direction z . Valeur de $\vec{j}_0$? Ecrire les équations linéarisées au voisinage de l'équilibre.

2) Les solutions sont cherchées comme dans A 2) avec $\rho_0 = \rho_0(y)$
 Déterminer $\vec{j}_x$ en fonction de $\vec{B}_0$, ω , ψ_0 , k et $\vec{u}'_y$. (On utilisera
 $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{W}) - \Delta(\vec{W})$).

En utilisant les équations b), c), d) linéarisées, déterminer
 l'équation vérifiée par $\vec{U}(y)$ analogue à a).

3) Comme dans A), le fluide est constitué d'un fluide de densité
 ρ_1 constante superposé, à l'équilibre, à un fluide de densité ρ_2 constante.
 Montrer que $\vec{U}(y)$ a la même forme que précédemment. En appliquant la
 même méthode d'intégration autour de $y=0$, montrer que la relation
 $\omega = \omega(k)$ est de la forme

$$\omega^2 = kg(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1) + k^2 f(\vec{B}_0, \rho_1, \rho_2)$$

Déterminer f . Le champ magnétique est-il stabilisant ou déstabilisant ?
 Quelles sont les longueurs d'onde des modes stables ?

- HMC -

Séminaire de Septembre 85

Intégralité de type Rayleigh-Taylor en MHD.

Équation: $v_{z0} \quad \vec{p}_0 = \rho_0 \vec{g} \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$

Linearisation

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} p' + \rho_0 \vec{g} + \rho' \vec{g}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = - \vec{\nabla} p' + \rho' \vec{g}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rho_0 = 0$$

$$X(y) e^{i(ky - \omega t)}$$

$$\begin{cases} -\rho_0 i\omega v'_x = 0 \\ -\rho_0 i\omega v'_y = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \rho' g \\ -\rho_0 i\omega v'_z = -ik p' \\ -i\omega \rho' = -v'_y \frac{d\rho_0}{dy} \\ \frac{dv'_y}{dy} + ik v'_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho' = \frac{\rho_0 \omega}{k} v'_y \\ = \frac{\rho_0 \omega}{k} \left(-\frac{1}{ik}\right) \frac{dv'_y}{dy} \end{cases}$$

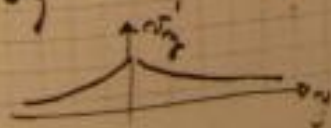
$$\rightarrow -\rho_0 i\omega v'_y = \frac{-i\omega}{k^2} \frac{d}{dy} \left(\rho_0 \frac{dv'_y}{dy} \right) + \frac{i\rho_0}{\omega} \frac{d\rho_0}{dy} v'_y$$

$$\rightarrow \frac{k^2}{\omega} \rho_0 v'_y = \frac{d}{dy} \left(\rho_0 \frac{dv'_y}{dy} \right) - \frac{k^2}{\omega} \frac{\rho_0}{\omega} \frac{d\rho_0}{dy} v'_y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \left(\rho_0 \frac{dv'_y}{dy} \right) - \frac{k^2 \rho_0}{\omega^2} \frac{d\rho_0}{dy} v'_y - k^2 \rho_0 v'_y = 0$$

Donc $\frac{d^2}{dy^2} V_y = k^2 V_y$

$$\begin{aligned} V_y &= v_y(y) e^{i(ky - \omega t)} & y > 0 \\ &= v_y(y) e^{-ky} & y < 0 \end{aligned}$$



$$= \left(\rho_0 \frac{dV_0}{dy} \right) \left(\frac{h^2}{m^2 \omega^2} \right) - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 dV_0 \left[- \frac{h^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 V_0 dy \right]$$

$$b(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \rho_0 \frac{1}{y} dy = \int_0^{\varepsilon} \rho_1 v_y(0) e^{-ky} dy + \int_{-\varepsilon}^0 \rho_2 v_y(0) e^{ky} dy$$

$\rightarrow \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$

$$(-\hbar) \rho_1 v_y(x) - \rho_2 v_y(x) (\hbar) - \frac{\hbar^2 q}{\omega^2} (\rho_1 v_z(x) - \rho_2 v_z(x)) = 0$$

$$\omega^2 = \lg \frac{g_2 - g_1}{g_1 + g_2}$$

$$S_1 \approx S_2 \quad \text{stable}$$

- Rep 3 -

1) B_0 uniforme. $\text{rot } B_0 = 0$ $j_z = 0$
 $E_0 + v_0 \wedge B_0 = 0$ $E_0 = 0$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} p' + \rho \vec{g}' + \vec{j}' \wedge \vec{B}_0$$

$$\vec{j}' = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}'$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}'$$

$$\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}_0 = 0$$

$$j'_x B_0 = \begin{vmatrix} j'_y B_0 \\ j'_z B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X = X(y) e^{i(ky - \omega t)}$$

2) $-i\omega \vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v}' \wedge \vec{B}_0)$ $B'_z = \frac{1}{i\omega} \text{rot } (v'_x B_0)$

$$\vec{j}' = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B}' = -\frac{1}{i\omega \mu_0} \text{rot } (\text{rot } (v'_x B_0))$$

$$= -\frac{1}{i\omega \mu_0} [\text{grad } (\text{div } (v'_x B_0)) - \Delta (v'_x B_0)]$$

Donc $\text{div } (\vec{v}' \wedge \vec{B}_0) = \frac{\partial}{\partial y} (-v'_x B_0)$

$$v'_x B_0 = \begin{vmatrix} v'_y B_0 \\ -v'_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{grad}_x (\text{div } (v'_x B_0)) = 0$$

$$\Delta (v'_x B_0) \Big|_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v'_y B_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (v'_y B_0) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (v'_y B_0)$$

Donc

$$j'_x = + \frac{B_0}{i\omega \mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (v'_y B_0) + k^2 v'_y \right]$$

Composante y de b) linéarité

a) $\rho_0 (-i\omega) v'_y = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \rho' g - j'_x B_0$

Composante z de b) linéarité

$$\rho_0 (-i\omega) v'_z = -ik p'$$

- Ex 4 -

4) Lame

div $\vec{v} = 0$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + i k v_z = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_0 \frac{\omega}{k} v_z \right) = \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_0 (-i) \frac{1}{k} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ &= - \frac{\omega}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Enfin, pour $\vec{E}$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + v \cdot \nabla \vec{E} &= 0 \rightarrow -i\omega \vec{E} + v_y \frac{d\vec{E}}{dy} = 0 \\ + \vec{E} &= \frac{1}{i\omega} \frac{d\vec{E}}{dy} v_y \end{aligned}$$

Donc, dans a)

$$\begin{aligned} \epsilon_0 (-i\omega) v_y &= + \frac{\omega}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - \frac{1}{i\omega} \frac{d\epsilon_0}{dy} v_y \\ &= - \frac{\epsilon_0^2}{i\omega \mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (v_y) - k^2 v_y \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } v_y = V(y) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -i\omega \epsilon_0 V(y) &= \frac{\omega}{k^2} \frac{d}{dy} \left(\epsilon_0 \frac{dV}{dy} \right) - \frac{1}{i\omega} \frac{d\epsilon_0}{dy} V(y) \\ &= - \frac{\epsilon_0^2}{i\omega \mu_0} \left[\frac{d^2}{dy^2} V(y) - k^2 V(y) \right] \end{aligned}$$

re (en x par $i \frac{k^2}{\omega}$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\epsilon_0 \frac{dV}{dy} \right) - \frac{k^2 \epsilon_0}{\omega^2} \frac{d\epsilon_0}{dy} V &= \epsilon_0 k^2 V(y) \\ - \frac{\epsilon_0^2 k^2}{i\omega \mu_0} \left[\frac{d^2}{dy^2} V - k^2 V(y) \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$1) \quad \rho_0 = \begin{cases} \rho_1 & y > 0 \\ \rho_2 & y < 0 \end{cases}$$

$$v(y) = v_y(0) e^{-\frac{\rho_1}{2} y} \quad y > 0 \\ = v_y(0) e^{\frac{\rho_2}{2} y} \quad y < 0$$

$$\text{dans Pour } y > 0, \quad \rho_1 \frac{d^2 v}{dy^2} - \rho_1 k^2 v = -\frac{\rho_0 k^2}{\omega^2 \mu_0} \left[\frac{dv}{dy} - k^2 v \right]_0$$

(évident), terme à terme).

L'analyse concernant les 3 premières termes va être la même que précédemment pour le processus de limite. X. Il ne s'agit que d'étudier les 2 derniers termes.

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{d^2 v}{dy^2} dy = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{d}{dy} \left(\frac{dv}{dy} \right) dy = \left(\frac{dv}{dy} \right)_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \\ = \frac{1}{2} \bar{v}(+\varepsilon) - \left(+\frac{1}{2} v(-\varepsilon) \right) \\ \rightarrow -2k v_y(0) \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} v(y) dy \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{d'après vu.}$$

Donc

$$-k \rho_1 v_y(0) - \rho_2 v_y(0) k = -\frac{k^2 \rho_0}{\omega^2} (\rho_1 v_y(0) - \rho_2 v_y(0)) \\ - \frac{\rho_0 k^2}{\omega^2 \mu_0} (-2k v_y(0)) = 0$$

$$\Rightarrow -k(\rho_1 + \rho_2) = + \frac{k \rho_0}{\omega^2} (\rho_1 - \rho_2) + \frac{\rho_0 k^2}{\omega^2 \mu_0} 2k$$

$$\omega^2 = k \rho \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{2 \rho_0 k^2}{\mu_0 (\rho_1 + \rho_2)}$$

146
 champ magnétique nul, car $B_0 \omega^2$ on ajoute une
 partie positive $\propto k g \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2}$

~~condition~~

$$\omega_{B_0}^2 > \omega_{B_0=0}^2$$

ω sera quel peu le plus grand nombre
 de valeurs de k

modes stable $\omega^2 > 0$

$$k g \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2} + \frac{2 B_0^2 k^2}{\mu_0 (g_1 + g_2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\omega}{\lambda} = k \geq \frac{(g_1 - g_2) g}{2 B_0^2 / \mu_0}$$

Longueurs
 d'onde

— N —

Mécanique des Milieux Continus

Rotation de Faraday

Un plasma froid dans son état initial, à une densité uniforme (n_e constante), est au repos dans un champ magnétique $\vec{B}_0$ porté par Oz, sans champ électrique ($\vec{E}_0 = \vec{0}$) ni courant ($\vec{j}_0 = \vec{0}$).

Cet état est perturbé ; on appelle $\vec{B}$, $\vec{E}$ les petites perturbations électromagnétiques. On montre que, pour des solutions ondes planes des équations de Maxwell (de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω) couplées aux équations du mouvement linéarisées, on a

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\text{ou } \vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \text{ avec } \epsilon_1 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_{ci}^2 - \omega^2)}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{1}{\omega^2} (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)$$

ω_{ce} (resp ω_{ci}) et ω_{pe} (resp ω_{pi}) sont les pulsations cyclotroniques et plasma des électrons (resp ions)

1) Soit $\vec{k}$ tel que $(\vec{k}, \vec{B}_0) = \theta$, $\vec{k} \in (xoz)$. Calculer les éléments du tenseur $\vec{D}$ tel que $\vec{D} \vec{E} = 0$ en fonction de $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \theta, |\vec{k}|, \omega$ et c .

2) Dans le cas de hautes fréquences, $\omega \gg \omega_{ci}$, $\omega \gg \omega_{pi}$, avec $\theta = 0$, donner les relations de dispersion pour les ondes droite et gauche. Exprimer k_+ et k_- en fonction de $\omega, \omega_{ce}, \omega_{pe}$ et c .

3) Une onde électromagnétique monochromatique (pulsation ω) polarisée rectilignement suivant Ox, transverse, se propageant suivant Oz, pénètre dans le plasma en $z = 0$ (on ne considère pas les effets de frontière).

a) Montrer que dans le vide, une telle onde peut être considérée comme superposition de deux ondes polarisées circulairement en sens inverse. On pourra utiliser une représentation géométrique.

b) Dans le plasma, les ondes droite et gauche s'écrivent

$$\vec{E}_R = (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) E_m \exp i(k_{\pm} z - \omega t)$$

Quel est le champ $\vec{E}$ dans le plasma ? Calculer E_x/E_y en fonction de z , k_+ et k_- ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ base de $\mathbb{R}^3$).

c) Soit $\varphi = (\vec{E}, \vec{e}_x)$ l'angle de la direction de polarisation de l'onde dans le milieu avec l'axe Ox. Montrer que φ est proportionnel à z (rotation de Faraday). Conclusion.

4) On considère à présent des ondes électromagnétiques telles que celles données en II-1, se propageant perpendiculairement à $\vec{B}_0$. On note $N = \frac{kc}{\omega}$, $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Donner la relation de dispersion pour de telles ondes. Montrer que les solutions pour N sont $N^2 = \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1}$ et $N^2 = \epsilon_3$.

5) a) Montrer que pour les modes siffleurs ($k = k_+$ dans II-2, $\omega < \omega_{ce}$) la vitesse de phase est maximum pour $\omega = \omega_{ce}/2$ et que ce maximum est inférieur à c.

b) Montrer que la vitesse de groupe du mode siffleur est proportionnel à $\omega^{1/2}$ si $\omega \ll \omega_{ce}$ et $v_g \ll c$. Conclusion.

Solution

-3-

Snadly.

$E \equiv E_1$ $h_1 h_2$

$$\hbar \nabla \vec{E}_1 = \omega \vec{B}_1$$

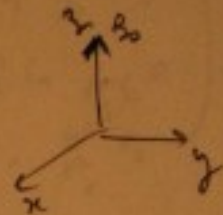
$$\hbar \nabla \vec{B}_1 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_1 \times \vec{E}_1$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 & -iE_2 & 0 \\ iE_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}$$

$$\hbar \nabla (\hbar \nabla \vec{E}_1) = \omega (\hbar \nabla \vec{B}_1) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 \times \vec{E}_1$$

$$= (\hbar \nabla \vec{E}_1) \times \vec{E}_1 - \hbar \nabla \vec{E}_1 \times \vec{E}_1 = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 \times \vec{E}_1$$

$$= (\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1) \vec{E}_1 - \hbar \nabla \vec{E}_1$$



$$\vec{D} = \vec{E} \otimes \vec{E} - \hbar^2 \mathbb{I} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

$$k_x = k \sin \theta \quad k_y = 0 \quad k_z = k \cos \theta$$

$$\vec{k} \otimes \vec{k} = \begin{pmatrix} k^2 \sin^2 \theta & 0 & k^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & k^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} -\hbar^2 \sin^2 \theta + \frac{\omega^2}{c^2} E_1 & \frac{\omega^2}{c^2} (-iE_2) & \hbar^2 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\omega^2}{c^2} iE_2 & -\hbar^2 + \frac{\omega^2}{c^2} E_1 & 0 \\ \hbar^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & -\hbar^2 \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{c^2} E_3 \end{pmatrix}$$

∴ haute fréquence -

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2}$$

$$\epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

$\vec{B} = 0 \Rightarrow \text{Det } \mathcal{D} = 0 = \text{Det} \begin{pmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 & -i \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 & 0 \\ \frac{\omega^2}{c^2} i \epsilon_2 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \end{pmatrix} = 0$



Donc

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \left[\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \right)^2 - \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_2^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \left[\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 \right) \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 \right) \right] = 0$$

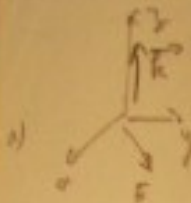
$$\Rightarrow \boxed{k_{+}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{ce} - \omega)(\omega_{ce} + \omega)} \left(\frac{\omega + \omega_{ce}}{\omega} \right) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (\omega_{ce} - \omega)} \right)$$

$$\boxed{k_{-}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2)} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{ce} - \omega)(\omega_{ce} + \omega)} \left[\frac{\omega - \omega_{ce}}{\omega} \right] \right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (\omega_{ce} + \omega)} \right)$$



$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

$$E_x = E_m \cos(\omega t)$$

$$E_y = E_m \sin(\omega t)$$

$$E_z = E_m \cos(\omega t)$$

$$E_y = E_m \sin(\omega t)$$

$$\vec{E}_x = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y$$

$$E_x = 2 E_m \cos(\omega t) \quad E_y = 0$$

in time, das B und

$$\vec{E}_x = (\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y) E_m e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \vec{e}_x E_m e^{i(kz - \omega t)}$$

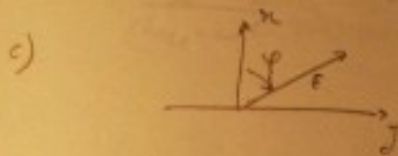
b) Dann e plane $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$

$$= (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) E_m e^{i(kz - \omega t)} + (\vec{e}_x - i \vec{e}_y) E_m e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= [\vec{e}_x (e^{i(kz - \omega t)} + e^{i(kz - \omega t)}) + i \vec{e}_y (e^{i(kz - \omega t)} - e^{i(kz - \omega t)})] E_m e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\frac{E_x}{E_y} = i \frac{e^{i(kz - \omega t)} + e^{-i(kz - \omega t)}}{e^{i(kz - \omega t)} - e^{-i(kz - \omega t)}} = -i \frac{1 + e^{-2i(kz - \omega t)}}{1 - e^{-2i(kz - \omega t)}}$$

$$= \cotg \frac{(kz - \omega t)}{2}$$



$$E_x = E \sin \varphi$$

$$E_y = E \cos \varphi$$

$$\frac{E_x}{E_y} = \tan \varphi$$

$$\tan \varphi = \tan \left(\frac{k_- - k_+}{2} \right) z$$

$$\varphi = \left(\frac{k_- - k_+}{2} \right) z + 2\pi n$$

$$k_- = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k_+^2}{\omega(\omega + \omega_0)}}$$

$$k_+ = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{c^2 k_-^2}{\omega(\omega - \omega_0)}}$$

6

7

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 & -i \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 & 0 \\ \frac{\omega^2}{c^2} i \epsilon_2 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \right) - \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_2^2 \right) \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{k^2 \omega^2}{c^2} \epsilon_1 + \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_1^2 - \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_2^2 \right) \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \right) = 0$$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \times \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_1 = \frac{\omega^4}{c^4} (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) = k^2 \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} N^2 = \epsilon_3 \\ N^2 = \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1} \end{matrix}}$$

-8-

Don

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2 k}{2\omega + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \omega_{ce}} = v_g = \frac{kc^2}{\omega + \frac{\omega_{pe}^2}{2(\omega_{ce} - \omega)}} = \frac{kc^2}{2\omega_{ce}}$$

h. $\omega \propto \omega_{ce}$

$$v_g = \frac{kc^2}{\omega + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}}} = \boxed{\frac{kc^2}{\omega + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}}} = v_g}$$

main, $\omega \propto \omega_{ce}$

$$c^2 k^2 \approx \omega^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}$$

Don

$$v_g = \frac{c \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}}}{\omega + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}}} = v_g$$

$$v_g \approx \frac{c^2}{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_{ce} - \omega)}} \approx \frac{c^2}{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}} \quad v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}}}$$

$$v_g \propto c \quad \text{si} \quad \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \gg 1$$

$$\text{Don } v_g = \frac{c \omega}{\omega + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}}} \approx c \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}}}{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}}} \approx c \frac{\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}}}{\frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{ce}}}$$

$$= 2c \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \approx \omega^{1/2}$$

différentiel

$$\boxed{h_z h_s = \frac{v}{c} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{1}{\omega_{ce} - \omega} \right)^{1/2}}$$

$$\frac{h_z^2 h_s^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} - 1 \right)} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)}$$

relation de phase

$$v_g = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{c^2}{v_g^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}$$

$$\Rightarrow c^2 v_g^{-3} \frac{dv_g}{d\omega} = + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 (\omega - \omega_{ce})} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})^2} =$$

$$\omega_{ce} = \omega_{ce} \Rightarrow \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 (\omega - \omega_{ce})} \left[(\omega - \omega_{ce}) + \omega \right] = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\omega_{ce} + \omega_{pe}}{2}}$$

$$\frac{c^2}{v_g^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} = 1 + \frac{4\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} > 1 \Rightarrow \boxed{v_g < c}$$

relation de groupe

$$c^2 k^2 = \omega^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\frac{\omega_{ce}}{\omega} - 1} = \omega^2 + \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega_{ce} - \omega} = c^2 k^2$$

$$2c^2 k dk = 2\omega d\omega + \omega_{pe}^2 \left[\frac{1}{\omega_{ce} - \omega} + \frac{\omega}{(\omega_{ce} - \omega)^2} \right] d\omega$$

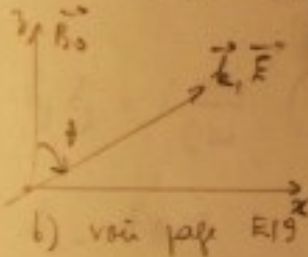
$$= 2\omega d\omega + \omega_{pe}^2 \left[\frac{\omega_{ce}}{(\omega_{ce} - \omega)^2} \right] d\omega$$

onde. $k \parallel B_0$
 pofund $k \perp B_0$
 longitudinal $k \parallel E_1$
 transverse $k \perp E_1$

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m} \quad \omega_p^2 = \frac{k_e^2}{\epsilon_0 m}$$

Exercice : a) Calculer la relation de dispersion pour des ondes électrostatiques électroniques ^{longitudinales} se propageant dans une direction faisant un angle θ arbitraire par rapport à B_0 , champ magnétique non perturbé dirigé suivant z . $E_0 = 0$

On choisira l'axe des x tel que k et E soient dans le plan $x-z$. Considérons le cas $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \vec{E}_1$
 $\theta \rightarrow 0$ $E_0 = 0$



b) voir page E19

$R_p = \frac{m}{e}$

c

$$\text{div } E_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0 + \frac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{r}$$

$$E_z = E_1 = 0$$

$$E = E_1$$

$$i(\epsilon_0 E_x + \epsilon_0 E_z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_1$$

On calcule n_1

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 (\text{div } v_1) = 0$$

$$T_x = 0$$

$$\frac{d}{dt}(n_1 v_z) = 0$$

$$i \sin(-i \omega n_1 + n_0 i (\epsilon_0 v_x + \epsilon_0 v_z) = 0$$

$$v_z = 0$$

On calcule v_x, v_z

$$m n_0 (-i\omega) v_i = -en_0 E_i - en_0 (v_i \times B_0)$$

Composante x

$$v_x = -\frac{ie}{m\omega} E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} v_y$$

" y

$$v_y = \frac{i\omega_c}{\omega} v_x$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = -\frac{ie}{m\omega} E_x + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} v_x + \frac{-ie}{m\omega} E_x \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} = v_x \\ v_y = -\frac{ie}{m\omega} E_y \end{array} \right.$$

Equation de continuité $n_1 = \frac{n_0}{\omega} \left(\frac{-ie}{m\omega} \right) \left[k_x E_x \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + k_y E_y \right]$

Donc

$$k_x E_x + k_y E_y = i \frac{en_0}{\epsilon_0 \omega} \left(\frac{-ie}{m\omega} \right) \left[k_x E_x \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + k_y E_y \right]$$

$$k_x = k \sin \theta$$

$$k_y = k \cos \theta$$

Donc

$$k E_x \sin^2 \theta + k E_y \cos^2 \theta = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[k E_x \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + k E_y \cos^2 \theta \right]$$

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[\sin^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} + \cos^2 \theta \right]$$

$$1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 - \cos^2 \theta + \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \cos^2 \theta \right]$$

$$\omega^2 - \omega_c^2 - \omega_p^2 = - \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{\omega^2} \cos^2 \theta$$

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = 0$$

avec $\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$ fréquence hybride supérieure

Relation de dispersion
 $\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$

On veut pour ω^2

On a

$$\omega^4 - \omega^2 \omega_h^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \omega^2 \cos^2 \theta = 0$$

$$\text{donc } \omega^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_h^2 \pm (\omega_h^4 - 4\omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\omega^2 \rightarrow \omega_h^2$ la limite $\omega \rightarrow 0$ n'a pas de réalité physique.

$$\begin{aligned} \text{Quand } \theta \rightarrow 0 \quad \omega^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \left[\omega_h^2 \pm (\omega_h^4 - 4\omega_p^2 \omega_c^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega_h^2 \pm (\omega_h^2 - 2\omega_p \omega_c)^{\frac{1}{2}} (\omega_h^2 + 2\omega_p \omega_c)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega_h^2 \pm (\omega_p - \omega_c) (\omega_p + \omega_c) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega_h^2 \pm (\omega_p^2 - \omega_c^2) \right] = \frac{1}{2} \left[\omega_p^2 + \omega_c^2 \pm (\omega_p^2 - \omega_c^2) \right] \end{aligned}$$

$$\omega^2 \rightarrow \begin{matrix} \omega_p^2 \\ \omega_c^2 \end{matrix}$$

La dernière limite obtenue s'interprète en prenant $\theta \rightarrow 0$, les oscillations se font parallèlement au champ magnétique et doivent être indépendantes de ce champ.

b) représenter graphiquement $\omega = \omega(k_z)$ pour les trois cas - en distinguant les 2 cas

$$\omega_p > \omega_c \quad \text{et} \quad \omega_p < \omega_c$$

Où

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_k^2 \pm \left(\omega_k^4 - 4\omega_p^2\omega_c^2 \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{fonction paire}$$

Solution (+) $k_z \rightarrow +\infty$

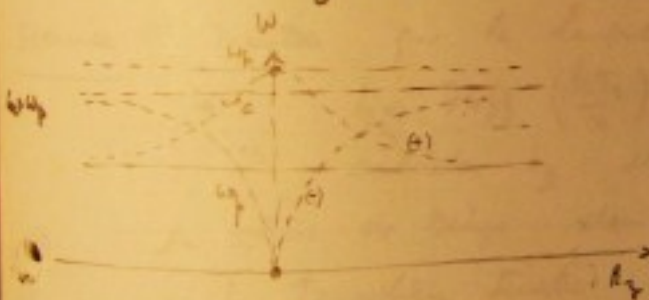
$$\omega^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left[\omega_k^2 + (\omega_k^4 - 4\omega_p^2\omega_c^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\omega_k^2 + (\omega_k^2 - 2\omega_p\omega_c)(\omega_k^2 + 2\omega_p\omega_c)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\omega_k^2 + (\omega_p^2 - \omega_c^2) \right] = \omega_p^2$$

(-) $k_z \rightarrow \infty$

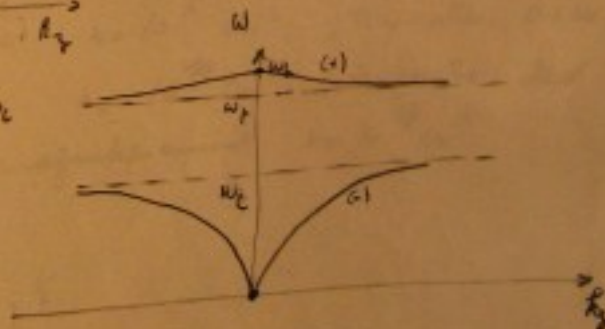
$$\omega^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left[\omega_k^2 - (\omega_p^2 - \omega_c^2) \right] = \omega_c^2$$



$k_z = 0$ (*) $\rightarrow \omega^2 \rightarrow \omega_k^2 > \omega_c^2$

(-) $\omega^2 \rightarrow 0$

$\omega_p > \omega_c$



Donnée

Quelle est la pression, exprimée en atmosphères, exercée par un plasma thermonucléaire sur son enceinte. On suppose que les températures ionique et électronique sont égales et valent 15 keV. La densité est $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

Rep.

$$kT_e = kT_i = 15 \cdot 10^3 \text{ eV} \quad p = nk(T_e + T_i)$$

$$p = 10^{21} (30 \cdot 10^3) = 1,6 \cdot 10^8$$

$$= 4,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ N/m}^2 \quad p = 48 \text{ atm}$$

Donnée

Exprimez la longueur de Debye λ_D en fonction de

$$\lambda_D = 7435 \left(\frac{kT_e}{n} \right)^{1/2} \quad kT_e \text{ en eV, } n \text{ en m}^{-3}$$

Calculez λ_D et N_D le nombre de particules dans

la sphère de Debye, dans les cas suivants

1. Ionosphère terrestre $n = 10^6 \text{ cm}^{-3}$, température 0,1 eV

2. décharge de gaz $n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, température 2 eV

3. Plasma confiné magnétiquement $n = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

température 800 eV

Rep.

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 kT_e}{ne^2} \right)^{1/2}$$

$$1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$(kT_e)_{\text{eV}} = \frac{(kT_e)_\text{J}}{1.6 \cdot 10^{-19}}$$

Donc

$$\lambda_D = \left(\frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{e \cdot (kT_e)_{\text{eV}}}{n e^2} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{(kT_e)_\text{J}}{n \times 1.6 \cdot 10^{-19}} \right)^{1/2} = \left(\frac{(kT_e)_\text{J}}{n} \right)^{1/2} \left(\frac{10^{-9}}{36\pi \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \right)^{1/2}$$

$$36\pi \times 1.6 = 36 \times 3.14 \times 1.6$$

$$= 180,864$$

$$= \left(10^{10} \cdot 5,529 \cdot 10^{-3} \right)^{1/2}$$

$$= \left(55,29 \times 10^6 \right)$$

$$= 7435 \left(\frac{(kT_e)_{\text{eV}}}{n} \right)^{1/2}$$

Ionosphère $n = 10^6 \text{ cm}^{-3} = 10^{12} \text{ m}^{-3}$

$$\lambda_D = 7435 \left(\frac{0.1}{10^{12}} \right)^{1/2} = 7435 \left(10 \cdot 10^{-14} \right)^{1/2} \text{ m}$$

$$= 23511 \cdot 10^{-7} = 2,35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 2,35 \text{ mm}$$

Orbiteur gazeux

$$\lambda_D = 7435 \left(\frac{2}{10^{16}} \right)^{1/2} = 10513 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$\# 10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$$

Plasma Confiné :

$$\lambda_D = 7435 \left(\frac{800}{10^{17}} \right)^{1/2} = 7435 \left(80 \cdot 10^{-16} \right)^{1/2}$$

$$= 7435 \times 8,94 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$= 64468 \cdot 10^{-8} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Exercice 1

On considère des particules dans un champ magnétique constant avec une vitesse longitudinale négligeable devant la vitesse du mouvement transverse. Quel est le rayon de Larmor dans les cas suivants :

- 1) un électron de 15 keV dans une centrale de radiation de la terre où le champ est $B \approx 5 \cdot 10^{-5} T$
- 2) un proton du vent solaire de vitesse 200 km/s en champ $B \approx 6 \cdot 10^{-3} T$
- 3) Pro d'une tache solaire ($B \approx 5 \cdot 10^{-2} T$), un He^+ de 2 keV
- 4) Dans un réacteur de fusion $B \approx 8 T$, une particule He^+ de 4 MeV

Réponse

$$E = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$$

$$r_L = \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{m}{q B} \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2} = \frac{1}{q B} (2mE)^{1/2} = \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{q B}$$

1) $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$v_{\perp} = \left(\frac{2 \times 15 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}} \right)^{1/2} = \left(\frac{4.8 \cdot 10^{-15}}{9.11} \right)^{1/2} = (52.68 \cdot 10^{-16})^{1/2} = 7.25 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

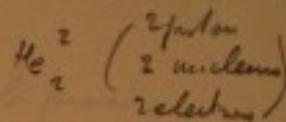
$$r_L = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 7.25 \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = \frac{6.604 \cdot 10^{-24}}{8 \cdot 10^{-24}} = 8.25 \text{ m}$$

$$2) \quad v_1 = 200 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1836 \times 9,11 \cdot 10^{-31}$$

$$r_2 = \frac{(1,67 \cdot 10^{-27}) \cdot 2 \cdot 10^5}{(1,6 \cdot 10^{-19}) (5 \cdot 10^{-9})} = \frac{334 \cdot 10^{-22}}{8 \cdot 10^{-28}} = 0,347 \cdot 10^6 \text{ m} = 347 \text{ km}$$

$$3) \quad m_{He^+} = 4 m_p$$



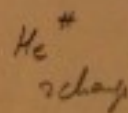
$$v_1 = \left(\frac{2 \times 2 \cdot 10^3 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2} = \left(\frac{6,4 \cdot 10^{-16}}{6,68 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2} = (0,958 \cdot 10^{11})^{1/2} = (9,58 \cdot 10^{10})^{1/2} = 3,09 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

$$r_2 = \frac{(4 \times 1,67 \cdot 10^{-27}) (v_1)}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^{-2}} = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \times 3,09 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^{-21}} = 2,58 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 0,258 \text{ m}$$

1 charge + (nucleon)

$$4) \quad r_2 = \frac{(8 m_e)^{1/2}}{9 B}$$

rayons mais



$$= \left[\frac{2 \times (4 \times 1,67 \cdot 10^{-27}) \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 8} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{(85,50 \cdot 10^{-40})^{1/2}}{25,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{9,74 \cdot 10^{-20}}{25,6 \cdot 10^{-19}} = 0,36 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 3,6 \text{ cm}$$

Exercice 3 :

Les températures électronique et ionique d'une colonne dans un champ magnétique longitudinal de 0.5 T sont égales à 1 eV.

Le profil de densité est de la forme

$$n = n_0 \exp \left(e^{-r^2/r_0^2} - 1 \right)$$

et le système est en équilibre thermodynamique

1) $r_0 = 10 \text{ cm}$

Quelle est la valeur maximum de la valeur de densité ?

2) Doit-on considérer dans ce cas la dérive due au champ de gravitation ?

Exp : $n = n_0 \exp \left(e^{-r^2/r_0^2} - 1 \right) = n_0 e^{\frac{e\phi}{kT_e}}$

Donc $\frac{e\phi}{kT_e} = \left(e^{-r^2/r_0^2} - 1 \right)$



Calculons le champ électrique

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} = \frac{kT_e}{e} \frac{2r}{r_0^2} e^{-r^2/r_0^2} \hat{r}$$



Le max de E_r est tel que

$$\frac{dE_r}{dr} = \frac{3kT_e}{e a^2} \left(1 - \frac{r^2}{\frac{1}{2} a^2}\right) e^{-\frac{r^2}{\frac{1}{2} a^2}} = 0$$

Donc $\frac{r^2}{\frac{1}{2} a^2} = \frac{1}{2}$ et $E_{max} = \frac{kT_e}{e r_0} \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} =$

$$(kT_e)_T = 16 \cdot 10^{-19} (kT_e)_W = (kT_e)_W \frac{2}{r_0 \sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{10 \cdot 10^{-2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } \vec{V}_E = -\frac{E_r}{B} \hat{\theta} \quad |V_{E_{max}}| = \frac{I_{max}}{0.5}$$

(la m pour les électrons et les protons)

- 2) Il faut distinguer par le champ de gravitation le cas des protons et celui des électrons

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{\nabla} \Delta \phi}{B^2}$$

Le fait d'oublier de comparer, pour des protons m_g et eE m_g — et

proton $m_g = (1.67 \cdot 10^{-27}) \cdot 9.80 = \frac{6.38}{39} \cdot 10^{-25} N$

$eE_{max} = (1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot 8.58 \gg m_g > m_g$

la vitesse de dérive due à la gravitation est de plusieurs ordres de grandeur plus petite que celle due au champ électrique

Devoir

Calculer la pression, en atmosphère, exercée par un plasma thermonucléaire sur son récipient de surface $kT_e = kT_i = 20 \text{ keV}$, $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $p = nkT$ où $T = T_i + T_e$

$$\text{Rq: } p = n(kT_e + kT_i) = 10^{21} (4 \cdot 10^8) (1.6 \cdot 10^{-19}) \\ = 6.4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ N/m}^2 \quad p = 64 \text{ atm}$$

Exercice

Calculer la longueur de Debye et N_D , le nombre de particules dans la sphère de Debye, dans les cas suivants

1. Décharge de gaz, avec $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ $kT_e = 3 \text{ eV}$
2. Ionosphère terrestre $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ $kT_e = 0.1 \text{ eV}$
3. Plasma confiné par champ magnétique
 $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $kT_e = 800 \text{ eV}$

$$\text{Rq: } 1) \lambda_D = 10^{-4} \text{ m} \quad N_D = 4.8 \cdot 10^{10} \\ 2) \lambda_D = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad N_D = 5.4 \cdot 10^{10} \\ 3) \lambda_D = 6.6 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad N_D = 1.2 \cdot 10^9$$

Donnée

Calculer le rayon de Larmor r_L dans les cas suivants, si $v_{||}$ est négligeable.

- un électron de 10 keV dans le champ magnétique terrestre ($B \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$)
- un proton du vent solaire avec une vitesse de 300 km/s $B \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ T}$
- un ion He^+ de 1 keV dans l'atmosphère solaire près d'une tache solaire où $B \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$
- une particule He^{++} de 3.5 MeV dans un rayon de fusion où $B \approx 3 \text{ T}$

Rep. $E = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$ $r_L = \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{m}{q B} \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2}$
 $= \frac{1}{q B} (2mE)^{1/2}$
 $r_L = \left(\frac{2E}{q^2 B^2} \right)^{1/2}$

a) $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$v_{\perp} = \left(\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}} \right)^{1/2} = 5.93 \cdot 10^7 \text{ m/s}$

$r_L = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 5.93 \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 6.75 \text{ m}$

b) $v_{\perp} = 300 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
 $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$

$r_L = \frac{(1.67 \cdot 10^{-27}) (3 \cdot 10^5)}{(1.6 \cdot 10^{-19}) (5 \cdot 10^{-9})} = 626 \text{ km}$

-E3-

$$c) \quad v_z = \left(\frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2} = 2.9 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad n(H_c^{14}) = 4 \text{ m}^3$$

$$l_z = \frac{(4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}) (2.9 \cdot 10^5)}{(1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 0.183 \text{ m} \quad H_c^2 \quad \begin{matrix} (2 \text{ puits}) \\ 2 \text{ n. de m.} \\ 2 \text{ calculs} \end{matrix}$$

la déviation : négligeable / parfaite

$$d) \quad l_z = \frac{(2mE)^{1/2}}{qB} \quad \text{formule Thomas (non)}$$

$$= \frac{[2 \cdot (4) \cdot (1.67 \cdot 10^{-27}) \cdot (3.5 \cdot 10^6) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}]^{1/2}}{2 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot (8)}$$

$$= 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (3 \text{ cm})$$

Précis

Donc on observe de l'effet cyclotronique B
dans un champ magnétique B
dans la direction de B
de la déviation négligeable (à 40 exp (cf / 62))
une déviation n(r) qui varie avec r sans

$$\frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{n}{a} \quad , \quad a \text{ constante}$$

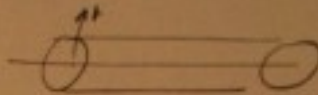
a) à l'aide de $E = -D\phi$, donner l'expression des
champs électriques pour a donné

b) montrer que $\langle v_r \rangle = 0$ si $\langle v_E \rangle = v_H$, v_E étant
la vitesse de dérive : les effets de rotation de la masse
sont alors importants sur l'échelle de variation de n

Rep: c) $\lambda = \lambda_0 \exp(e\phi/kT_e)$ Don

$$\phi = \frac{kT_e}{e} \log \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

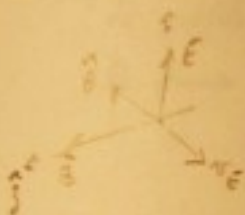
$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{kT_e}{e} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{kT_e}{e} \frac{1}{\lambda}$$



b) vitesse de dérive

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} = \frac{E_r \hat{r} \wedge B_z \hat{z}}{B^2} = -\frac{E_r}{B} \hat{\theta}$$

$$\hat{r} \wedge \hat{z} = -\hat{\theta}$$



$$|v_E| = \frac{kT_e}{e} \frac{1}{aB}$$

$$v_{th} = \left(\frac{2kT_e}{m} \right)^{1/2}$$

$$\text{Don } |v_E| = \frac{kT_e}{m} \frac{m}{eB} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} v_{th}^2 \frac{1}{\omega_c} \frac{1}{a}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (\text{fréquence de Larmor } f_c)$$

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$\text{A priori } t_2 = \frac{m v_{th}}{eB}$$

on doit trouver un rayon de Larmor moyen pour une distribution d'électrons à l'équilibre - dans

$$\left[\frac{1}{2} m \overline{v_{\perp}^2} = 2 \frac{1}{2} kT_e \right] \quad (\text{convenant à 2 dimensions})$$

Une approximation pour $\langle v_{\perp}^2 \rangle$ consiste à prendre

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle = \left(\frac{kT_e}{m} \right) = v_{th}^2$$

$$\text{Don } \langle t_2 \rangle = \frac{m v_{th}}{eB} = \frac{v_{th}}{\omega_c}$$

On a donc

$$|v_E| = \frac{1}{2} v_{th}^2 \frac{\langle v_z \rangle}{v_{th}} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} v_{th} \frac{\langle v_z \rangle}{a}$$

et $|v_E| = v_{th}$ implique $\langle v_z \rangle = a$

Donnée Une colonne de plasma dans un champ magnétique longitudinal de 0.3 T et tel que $kT_i = kT_e = 0.2$ eV le profil de densité est trouvé expérimentalement de la forme

$$n = n_0 \exp\left(\left[\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) - 1\right]\right)$$

On suppose que la densité vérifie la relation de Boltzmann $n = n_0 \exp(e\phi/kT_e)$

- calculer la valeur maximum de v_E si $a = 1$ cm.
- comparer v_E avec v_{th} , la vitesse de dérive due au champ de gravitation tenante pour des protons et des électrons.

Réponse :

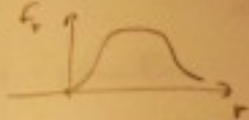
- $$n = n_0 \exp\left(e^{-r^2/a^2} - 1\right) = n_0 e^{(e\phi/kT_e)}$$

Don

$$\phi/kT_e = (e^{-1/2} - 1)$$

Calculons le champ électrique

$$E = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{kT_e}{e} \frac{2}{a^2} e^{-1/2}$$



Don

La max de E_r est tel que

$$\frac{dE_r}{dr} = \frac{2kT_e}{ea^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-1/2} = 0$$

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } E_{\max} = \frac{kT_e}{ea} \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = 17 \text{ V/m}$$

$$\text{Don } \vec{v}_E = -\frac{E_r}{B} \hat{\theta} \quad |v_{E_{\max}}| = \frac{17}{0.2} = 85 \text{ m/s}$$

Puis

alors comparer M_g et eE $g = 9.80 \text{ m/s}^2$

$$M_g = (1.67 \cdot 10^{-27}) (9.80) = 1.638 \cdot 10^{-26} \text{ N}$$

$$eE_{\max} = (1.6 \cdot 10^{-19}) (17) = 2.72 \cdot 10^{-18} \text{ N}$$

la force de pesanteur due à la gravitation est de plusieurs ordres de grandeur plus petite que celle due au champ électrique

Exercice 1



Le champ magnétique terrestre est égal à $3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ à l'équateur et décroît comme $\frac{1}{r^3}$ (champ d'un dipôle) une population isotrope d'électrons d'énergie 30 keV et de protons d'énergie 1 keV, de densité $n = 10^7 \text{ m}^{-3}$ est présente à une distance de 5 rayons terrestres dans le plan équatorial

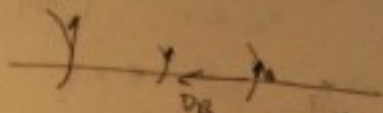
- Calculer les vitesses de dérive dues au gradient du champ magnétique pour les protons et les électrons
- L'électron dérive-t-il vers l'est ou vers l'ouest ?
- Quel est le temps mis par un électron pour faire le tour de la Terre ?
- Calculer le courant ainsi produit en A km^2

Rep: a) $S = \frac{e}{r^3} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{(5R)^3}$ (ici de décroissance dans le plan équatorial)

$$|\vec{v}_{\perp}| = \frac{1}{2} v_{\perp} v_L \left| \frac{\vec{B} \wedge \nabla B}{B^2} \right|$$

$$\vec{v}_B = \frac{2B}{3r} \hat{\phi}$$

donc B per de l'equation



$$v_B \perp B$$

donc $\vec{v}_B = - \frac{3c}{r} \hat{r} = \frac{3B}{r} (-\hat{r})$ et

$$\left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| = \frac{3}{r}$$

donc $\frac{1}{2} v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} \frac{v_z^2}{\omega_c^2} = \frac{1}{2} \frac{2\hbar T/m}{cB} = \frac{\hbar T}{cB}$

$$v_z = \frac{m v_{\perp}}{cB} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19}) (\hbar T) \omega}{1.6 \cdot 10^{-19} B} = \frac{(\hbar T) \omega}{B}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

et $B(r=5R) = \frac{0.2 \cdot 10^{-4}}{r^2} = 2.4 \cdot 10^{-7} T$

$5R = 5 \times 6400 \cdot 10^3 = 320 \cdot 10^5 m$

donc $|v_{vB}| = \frac{(\hbar T) \omega}{2.4 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{3}{320 \cdot 10^5} = \frac{10^{-9}}{2.4 \cdot 10^{-9}} (eT) \omega$

$$= 0.39 (eT) \omega \text{ m/s}$$

pour les électrons $\hbar T = 3.64 eV$

$|v_{vB}| = 1.17 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

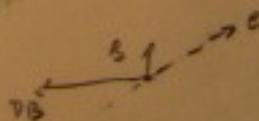
pour les protons $\hbar T = 1 eV$

$|v_{vB}| = 0.39 \text{ m/s}$

électrons donc vers l'est

protons ———— ouest

$$v = -\frac{1}{2} (B \times \vec{v}_B) \cdot \hat{e}$$



E.9.

c) Rinsati $\mu = 2\pi(512) = 6.18 \cdot 10^9 = 2.0 \cdot 10^8 \text{ m}$
 $t = \frac{\mu}{|v_m|} = \frac{2.0 \cdot 10^8}{1.17 \cdot 10^4} = 1.7 \cdot 10^4 \text{ s} = 4,8 \text{ h}$ electron

d) courant $j = n e v_D$ en multipliant la probab. (vitesse trop faible)
 $= (10^{21}) (1.6 \cdot 10^{-19}) (1.17 \cdot 10^4) = 1.87 \cdot 10^{-8} \text{ A/m}^2$

Exercice: Un plasma isotherme est confiné entre le plan $x = \pm a$ dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{z}$ - la densité est telle que

$$n = n_0 (1 - x^2/a^2)$$

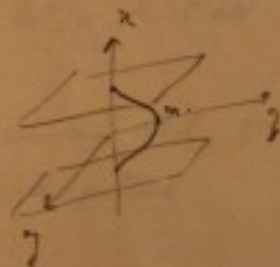
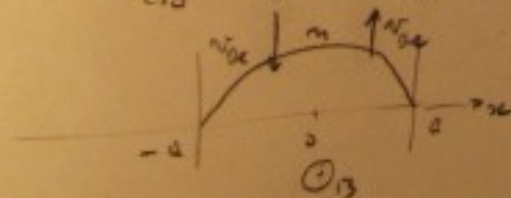
a) Donner v_{De} , la vitesse de dérive diamagnétique électronique en fonction de x .

b) Calculer v_{De} à $x = a/2$ si $B = 0,2 \text{ T}$ $kT_e = 2 \text{ eV}$
 $a = 4 \text{ cm}$.

Eq. $\vec{v}_{De} = - \frac{\gamma k T_e}{e B} \frac{\hat{z} \cdot \nabla n}{n}$

pour $\vec{v}_n = \hat{x} \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{n_0 2x}{a^2} \hat{x}$

$$\vec{v}_{De} = \hat{y} \frac{k T_e}{e B} \frac{2x}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1}$$



Dérive diamagnétique

$$b) \frac{hT}{eB} = \frac{(hT)_{ev} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{1.6 \cdot 10^{-19} B} = \frac{1}{0.2} = 10$$

$$1' = \left| \frac{n'}{n} \right| = \frac{(2m_0/a^2)(a/2)}{k_0(1 - a^2/4a^2)} = 133,3 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{Donc } v_{de} = (133,3 \times 10 = 1333 \text{ m/s})$$

$$0,333 \times 10^3 = 333 \text{ m/s}$$

Exercice 6 Une colonne de plasma cylindrique dans un champ magnétique uniforme longitudinal B est telle que la densité

$$n(r) = n_0 e^{-r^2/4r_0^2} \quad n_i = n_e = n_0 \exp(-r^2/4r_0^2)$$

- Montrer que v_E et v_{oe} ^(électronique) sont égaux et opposés
- Montrer que les 2 espèces sont en rotation comme des corps solides
- Calculer le courant diamagnétique j_0 en fonction des
- Donner: $B = 0.4 \text{ T}$ $n_0 = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ $kT_e = kT_i = 0.25 \text{ eV}$

$$r_0 = r_i = 1 \text{ cm}$$

c) dans le référentiel de laboratoire, ce courant est-il porté par les ions, les électrons ou les deux types de porteurs

d) (*)

$$\text{Rep: a) } \phi = \frac{kT_e}{e} \log \frac{1}{n_0} = \frac{kT_e}{e} \left(-\frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{kT_e}{e} \frac{2r}{r_0^2}$$

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} = - \frac{E_r}{B_z} \hat{\theta} = - \hat{\theta} \frac{kT_e}{eB} \frac{2r}{r_0^2} \quad \text{avec } \vec{B} = B_z \hat{z}$$

indépendante de la densité.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{De} &= - \frac{B \times \nabla p}{en B^2} = - \frac{kT_e}{eB} \frac{\partial/\partial r}{r} \hat{\theta} = - \hat{\theta} \frac{kT_e}{eB} \frac{\partial}{\partial r} (\log h) \\ &= - \hat{\theta} \frac{kT_e}{eB} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r^2}{r_0^2} \right) = \hat{\theta} \frac{kT_e}{eB} \frac{2r}{r_0^2} = - \vec{v}_E \end{aligned}$$

Pour les ions $\vec{v}_{Di} = - \hat{\theta} \frac{kTi}{eB} \frac{2r}{r_0^2}$

b) Comme $\vec{v}_E = -v \hat{\theta}$ et $\vec{v}$ est l'un quelconque des vecteurs considérés, on a $\omega = \frac{v_0}{r} = \text{cte}$

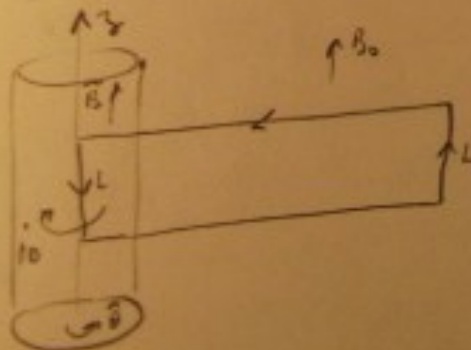
$$c) \quad I_0 = r_0 e (v_{Di} - v_{De}) = - \hat{\theta} \left(\frac{kTi}{eB} + \frac{kTe}{eB} \right) \cdot \frac{2r}{r_0^2} e^{-r^2/r_0^2}$$

$$|I_0| = \frac{(10^{16}) (0.5) 1.6 \cdot 10^{-19}}{(0.4) r_0^2 / r} \cdot 2.718 = \frac{10^{16} \cdot 0.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{(0.4) (\frac{1}{2}) 10^{-2} \cdot 2.718} = 0.147 \text{ A/m}^2$$

d) Comme $\vec{v}_e = \vec{v}_E + \vec{v}_{De} = 0$ dans le labo, le courant est porté par les ions.

e) Quel est le nouveau champ magnétique ^{en ligne} résultant de cet effet diamagnétique, l'écartant ayant un rayon $a \gg \frac{1}{2} r_0$.

resp:



et $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_0$ dans le plasma

$B_0 = B_0$ a l'extérieur du plasma, champ appliqué
Extension du plasma $a \gg r_0$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}_0 \cdot \vec{n} \, dS \quad \vec{j}_0 \cdot \vec{r} > 0$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_0 - \tilde{B}) L$$

$$j_0 = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kT_e + kT_i}{B_0} \right) \approx \frac{2e}{r_0^2} e^{-r^2/r_0^2}$$

$$\int j_0 \, dS \approx \frac{1_0 (kT_e + kT_i)}{B_0 r_0^2} \int_0^L \int_0^a e^{-r^2/r_0^2} 2\pi r \, dr \, dz$$

et $\tilde{B} \approx B_0$ dans cette intégrale

$$= \frac{L \mu_0 (kT_e + kT_i)}{B_0} \int_0^{a/r_0} e^{-x^2} dx^2$$

$$\approx \frac{L \mu_0 (kT_e + kT_i)}{B_0}$$

$$\Delta B = B_0 - \tilde{B} = \mu_0 \frac{1_0}{B_0} \frac{2kT}{kT_e = kT_i}$$

$$\text{Av. } \Delta B = 2 \times (4\pi \times 10^{-7}) \times 10^{16} \times \frac{(0.5) \times 1.6 \times 10^{-19}}{0.4} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ T}$$

Exercice 7 Calculer la fréquence de plasma en tenant compte du mouvement des ions. On utilisera l'équation du mouvement des ions, l'équation de continuité et l'équation de Poisson linéarisées.

Ré: On a:

$$\begin{aligned} \text{Poisson} \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} e (n_{e1} - n_{i1}) \quad n_{i0} = n_{e0} \\ -i\omega m_e v_{e1} &= -e E_1 \quad (\text{electron}) \quad (\text{mouvement}) \quad (v, D) \\ -i\omega M v_{i1} &= e E_1 \quad (\text{ion}) \quad (\text{neglige du 2nd ordre}) \\ -i\omega n_{e1} &= -i k n_0 v_{e1} \quad (\text{continuité electron}) \\ -i\omega n_{i1} &= -i k n_0 v_{i1} \quad (\text{" ion}) \end{aligned}$$

$$n_{e1} = \frac{1}{\omega} k_0 \left(\frac{-ie}{m\omega} \right) E_1 \quad n_{i1} = \frac{1}{\omega} n_0 \left(\frac{ie}{M\omega} \right) E_1$$

$$ik E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\omega} k_0 n_0 \frac{ie}{\omega} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) E_1 = \frac{ik E_1}{\omega^2} (\Omega_p^2 + \omega_p^2)$$

avec

$$\omega^2 = \Omega_p^2 + \omega_p^2$$

avec $\Omega_p^2 \ll \omega_p^2$

on peut donc considérer les ions immobiles.

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{M \epsilon_0}} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$$

ce qui

Remarque: Pour une oscillation de plasma avec les ions fixes $i(kx - \omega t)$, calculer sous forme d'onde plane, la phase δ de ϕ_1 , E_1 et v_1 (perturbation du potentiel électrique et du champ d'intensité) si la phase de n_1 est prise égale à 0.

Représenter graphiquement les ondes sinusoidales en fonction de x (t fixé), en fonction de t (x fixé) pour $\omega/k > 0$ et $\frac{\omega}{k} < 0$.

Def: On a $v_g = \frac{\omega}{k}$

voir ♥

$$E_1 = \frac{iE_0}{k\epsilon_0} n_1$$

(dans l'air) Pormon

$$n_1 = 0$$

$$n_2 = n_{10}$$

$$n_2 = n_{10} + n_{11}$$

$$n_{10} = n_{10}$$

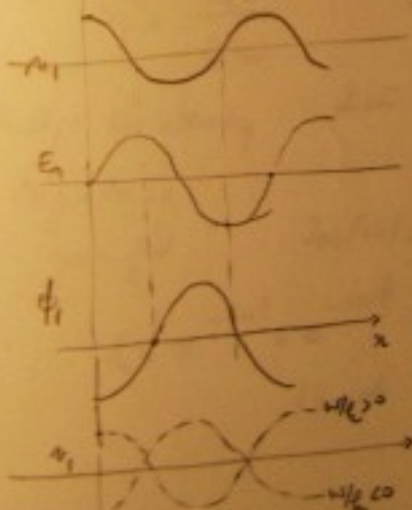
Donc $E = -\nabla\phi$

$$E_1 = -i\frac{E_0}{k}\phi_1$$

Donc

$$\phi_1 = \frac{iE_1}{k} = -\frac{E_0}{k^2\epsilon_0} n_1$$

Donc E_1 a une avance de phase $(E_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))$, n_1 : $\sin(\omega t)$
 de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à n_1 , ϕ_1 a une avance
 de 180° et v_g est en phase en
 la même de 180° suivant le signe de
 $\frac{\omega}{k}$



exercice a) Qual est l'effet d'atténuation dû aux termes d'ordre 1 sur les oscillations de plasma ?
On introduira par cela un terme $-m \nu$ dans l'équation du mouvement des électrons et on établira la relation de dispersion pour $T=0$

b) Donner l'expression de $\text{Im}(\omega)$ et montrer qu'elle indique que ces oscillations sont atténuées dans le temps.

— N —

Rep. On a $m n_0 (-i\omega / \nu) = -e n_0 E_1 - m \nu v_1$ 1/20

$$v_1 \left(1 + \frac{i\nu}{\omega} \right) = \frac{ie E_1}{m \omega}$$

Pour $i \frac{\nu}{\omega} E_1 = - \frac{1}{\epsilon_0} e n_1$

Continuité $n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_1$

Donc $i k E_1 = - \frac{1}{\epsilon_0} e \frac{k}{\omega} n_0 \frac{ie E_1}{m \omega} \left(1 + \frac{i\nu}{\omega} \right)^{-1}$

$$\omega^2 \left(1 + \frac{i\nu}{\omega} \right) = \omega_p^2$$

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \quad \text{et} \quad \omega^2 + i\nu \omega = \omega_p^2$$

b) Soit $\omega = x + iy$ Donc $x^2 - y^2 + 2ixy + i(x - y) = \omega_p^2$

$$2xy + x - y = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$\text{Im}(\omega) = -\frac{1}{2}\nu$$

$$E_1 \sim e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_r t} e^{-\frac{1}{2}\nu t} \quad \text{1/20}$$

l'onde est atténuée.

Licence de Physique
MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I. On considère un plasma constitué d'un mélange uniforme de protons, antiprotons, électrons et positrons de densité n_0 (certains physiciens ont émis l'hypothèse que l'Univers, dans son état initial, avait une telle composition). On négligera les collisions, les annihilations et les effets thermiques (dans I.2)

On notera par la suite : $N_{\pm 1}, \vec{v}_{\pm 1}$ (resp. $n_{\pm 1}, \vec{v}_{\pm 1}$) les perturbations des densités et des vitesses fluides des protons, antiprotons (resp. électrons, positrons) par rapport à l'équilibre pour lequel $N_{\pm 0} = n_{\pm 0} = n_0$ et $\vec{v}_{\pm 0} = \vec{v}_{\pm 0} = 0$

1) Donner la relation de dispersion des ondes électromagnétiques transverses de haute fréquence dans ce milieu.

2) Relation de dispersion des ondes ioniques.

a) Les électrons et positrons étant en équilibre thermique à la même température ($T_+ = T_- = T_e$), montrer que $n_{\pm 1} = \mp n_0 |e| \frac{\phi_1}{kT_e}$

où $\vec{E}_1 = -\text{grad} \phi_1$, K est la constante de Boltzmann. ($T_e = 0$)

b) Des équations de continuité et du mouvement des protons et antiprotons linéarisées, calculer $N_{\pm 1}$ en fonction de $n_0, \phi_1, |e|, M, \omega$ et k où M est la masse des protons (et des antiprotons), ω et $\vec{k}$ ($\vec{k} = |\vec{k}|$) étant la pulsation et le vecteur d'onde des solutions ondes planes de ces équations.

c) De l'équation de Poisson, donner la relation de dispersion des ondes ioniques en fonction de la longueur de Debye et de la fréquence plasma ionique.

II. Les équations d'équilibre d'un plasma sont :

$$(1) \quad \vec{\nabla} p = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

a) Montrer que (4) $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0$ et (5) $\vec{j} \cdot \vec{\nabla} p = 0$. Conclusion.

Montrer que $\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$. On utilisera pour cela la relation $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} B^2 \right) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$.

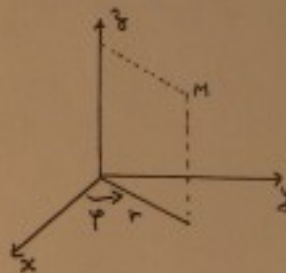
b) On suppose à présent que le plasma possède une symétrie axiale (les grandeurs physiques sont indépendantes de φ) et on considère les coordonnées cylindriques.

b1) Montrer que la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

est vérifiée s'il existe $\psi(r, z)$

telles que

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_\varphi = B_\varphi(r, z).$$



b2) On montre, en considérant l'une

des composantes de (1) que $r B_\varphi = f(\varphi)$ et également, en considérant

(4), que $p = g(\varphi)$, où f et g sont des fonctions arbitraires.

Montrer, à l'aide de la 3ème composante de (1), que ψ vérifie l'équation

$$(6) \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -f(\varphi) f'(\varphi) - \mu_0 r^2 g'(\varphi)$$

b3) On suppose $f=0$, $g(\varphi) = a\varphi + cte$, et on pose $\varphi(r, z) = \frac{\psi(r, z)}{r^2}$

Montrer que l'équation vérifiée par φ admet des solutions de la forme

$$\varphi(r, z) = \varphi_0 - r^2 - dz^2 \quad \text{où } \varphi_0 \text{ est une constante.}$$

Déterminer d en fonction de a et μ_0 (il existe alors des surfaces

$\psi = cte$, dites surfaces magnétiques, en forme de tores emboîtés à section elliptique, caractérisant l'équilibre du plasma).

N.B. Divergence et rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$$

1992

$$c) \text{ auf } \vec{x}_4 = \frac{\vec{b}_1}{24}$$

$$\nabla^2 \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

$$\int_{\gamma} \omega(\overrightarrow{\text{rot}} \xi_i) = - \left(\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

Rel. order plants $\frac{F_1}{F_0} = \frac{F_1}{F_0} \in (0, 1 - \text{ord})$

$$\Rightarrow \text{grad}(\text{div } \xi) = \delta \xi = \tilde{\xi}_i^j \left(\tilde{\xi}_j^i \tilde{E}_i \right) = \delta \tilde{E}_i$$

Under nonresonance $\nabla_{\perp}^2 \tilde{e}_1 = 0 \Rightarrow +\frac{1}{2} \tilde{e}_1 = \frac{1}{\omega_p^2} (\omega_p^2 \tilde{f}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{e}_1)$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} \right) \vec{\epsilon}_j = \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}$$

laute fefure (Poete du ^{18^{me}} siecle)

$$\vec{F}_g = m_0 \kappa (\vec{v}_{+} - \vec{v}_{-})$$

$$k_{10} \frac{dV_{21}}{dt} = + K_1 F_1 \quad \rightarrow \quad V_{21} = + \frac{K_1}{k_{10}} F_1$$

$$\therefore \text{iv) } \frac{d}{dt} = 5 \frac{100}{1000} \text{ } \left(\frac{1}{1000} \right)$$

$$\text{d.} \quad \left(\frac{1}{x^2} \right)^{-2} = \frac{1}{x^{-4}} = \left(\frac{1}{x} \right)^{-4} = (1+x)^{-4}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{\epsilon^2 \omega_0^2 \omega^2}{\epsilon^2 c^2 R^2} \Rightarrow \omega^2 - c^2 \frac{1}{R^2} = \frac{\omega_0^2 \omega^2}{\epsilon^2 \omega^2} + \frac{2\omega_0^2}{\epsilon^2}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} + \frac{c^2}{R^2}$$

$$1) \quad \text{div } \vec{E}_1 = \frac{|e|}{\epsilon_0} (N_{+1} - N_{-1} + n_0 - n_{-1})$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla} \phi_1$$

$$n_+ = n_0 e^{-\frac{m\phi_1}{kT_+}} \quad n_- = n_0 e^{\frac{m\phi_1}{kT_-}}$$

$$T_+ = T_- = T_e$$

$$n_0 = n_0 \left(1 - \frac{|e| \phi_1}{kT_e} + \dots \right)$$

$$n_{+1} = -n_0 \frac{|e| \phi_1}{kT_e}$$

$$n_{-1} = n_0 \frac{|e| \phi_1}{kT_e}$$

$$n_{\pm 1} = \mp n_0 \frac{|e| \phi_1}{kT_e}$$

$$\frac{\partial N_{\pm 1}}{\partial t} + N_{0\pm} \text{div } \vec{V}_{\pm 1} = 0$$

$$-i\omega N_{\pm 1} + N_{0\pm} (i\vec{k} \cdot \vec{V}_{\pm 1}) = 0$$

$$\Rightarrow N_{\pm 1} = n_0 \frac{\vec{E} \cdot \vec{V}_{\pm 1}}{\omega}$$

$$M_e \frac{\partial \vec{V}_{\pm 1}}{\partial t} = \pm |e| n_0 \vec{E}_1 \Rightarrow M(i\omega) \vec{V}_{\pm 1} = \pm |e| \vec{E}_1 = \pm |e| i \phi_1 \vec{e}$$

$$\omega \vec{V}_{\pm 1} = \pm \frac{\phi_1 k |e|}{M \omega} \vec{e}$$

$$N_{\pm 1} = \pm n_0 \frac{\phi_1 |e| k^2}{M \omega^2}$$

2) a)

$$\text{div } \vec{E}_1 = -\Delta \phi_1 = k^2 \phi_1 = \frac{|e|}{\epsilon_0} \left(-n_0 \frac{|e| \phi_1}{kT_e} - n_0 \frac{|e| \phi_1}{kT_e} + \frac{|e|}{\epsilon_0} \left(+ \frac{n_0 |e| k^2 \phi_1}{M \omega^2} + \frac{n_0 |e| k^2 \phi_1}{M \omega^2} \right) \right)$$

-3-

donc, avec $T = T_c$

$$\epsilon^* = \left(-2\epsilon_0 \frac{1\epsilon l^2}{\epsilon \pi T_c} + 2\epsilon_0 \frac{1\epsilon l^2 \hbar^2}{\epsilon \pi \omega^2} \right)$$

$$\mathcal{N}_p^2 = \frac{1\epsilon l^2}{\epsilon \pi} \quad \lambda_D = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon l^2}{\hbar^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{donc} \quad \epsilon^* = 2 \left(-\frac{1}{\lambda_D^2} + \mathcal{N}_p^2 \frac{\hbar^2}{\omega^2} \right)$$

$$\frac{1\epsilon}{\epsilon^*} \quad \epsilon^2 \lambda_D^2 + 2 = -2 \mathcal{N}_p^2 \frac{\hbar^2}{\omega^2} \lambda_D^2 \rightarrow \frac{\hbar^2}{\omega^2} = \frac{\epsilon^2 \lambda_D^2 + 2}{2 \mathcal{N}_p^2}$$

$$\frac{\hbar^2}{\epsilon^*} = \frac{2 \mathcal{N}_p^2 \lambda_D^2}{\epsilon^2 \lambda_D^2 + 2} \quad \frac{\mathcal{N}_p^2 \lambda_D^2}{1 + \frac{\epsilon^2 \lambda_D^2}{2}}$$

$$\frac{\hbar^2}{\omega^2} \left(\frac{2 \mathcal{N}_p^2 \lambda_D^2}{\epsilon^2 \lambda_D^2 + 2} \right) = 1$$

$$\frac{\hbar^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon^2 \lambda_D^2 + 2}{2 \mathcal{N}_p^2 \lambda_D^2} \right) = 1$$

$$\boxed{\frac{\omega^2 \cancel{\lambda_D^2}}{2 \mathcal{N}_p^2 \cancel{\lambda_D^2}} + \frac{2 \omega^2}{\hbar^2 \mathcal{N}_p^2 \lambda_D^2} = 1}$$

II

a) $\vec{B} \cdot \vec{\nabla}_P = 0$ et $\vec{f} \cdot \vec{\nabla}_P$ immédiat d'après 1) la ligne de champ et de courant se trouvent sur la même surface

$$\nabla \left(\frac{1}{2} B^2 \right) = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - (\nabla \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{B} = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla}_P$$

$$\Rightarrow \nabla \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B}$$

b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} B_z$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

c)

$$\vec{\nabla}_P = g'(\varphi) \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \hat{r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \hat{z}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f) \hat{z}$$

$$\text{et } \vec{B} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_r \\ B_\varphi \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} f'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f) \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_\varphi(r, z) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{vmatrix}$$

$$= \mu_0 g'(\varphi) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

2.2

$$\left(-\frac{1}{r} f'(u) \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) B_p(u, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right]$$

$$= \mu_0 g'(u) \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\Delta u = -f'(u) r B_p = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \mu_0 r^2 g'(u)$$

$$\text{et } r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 g''(u) = -f''(u) f(u)$$

63) $f(u) = g(u) = a\psi + b$ $g'(u) = a$ $\psi = r^2 \varphi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 2r\varphi + r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right] = r \left(3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)$$

$$\Delta u = r \left(3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 a$$

$$\varphi(r, z) = \varphi_0 - r^2 - d z^2 \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2r \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2d \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2d$$

2.2

$$3r(-2r) + r^2(-2) + r^2(-2d) = -\mu_0 r^2 a$$

$$\Rightarrow -8 - 2d = -\mu_0 a \rightarrow d = \frac{\mu_0 a - 8}{2}$$